# Основные абстракции механики.

1) Материальная точка – тело, размером которого можно пренебречь.
2) Абсолютно твёрдое тело – система мат. точек, расстояние между любой парой которых всегда остаётся неизменным.
3) Сплошная среда – среда, в которой вещество распределено непрерывно.

## §1. Кинематика материальной точки

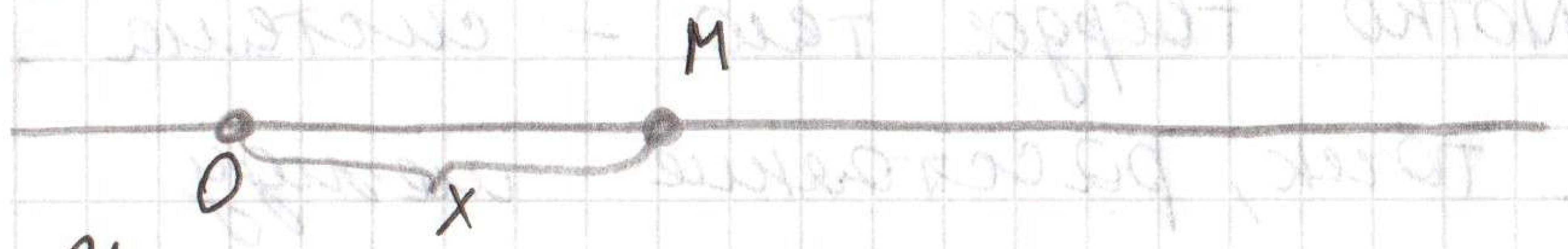
Кинематика – раздел механики, в котором изучается движение тел без рассмотрения причин этого движения

Движение – перемещение одного тела относительно другого.

Тело, относительно которого рассматривается движение, наз-ся телом отсчёта.

Задача механики: математически точно описать движение

Движение точки по прямой.




Измерение расстояния и промежутков времени.

Чтобы измерить расстояние, нужно сравнить его с длиной некоторого тела, принятого за эталон.

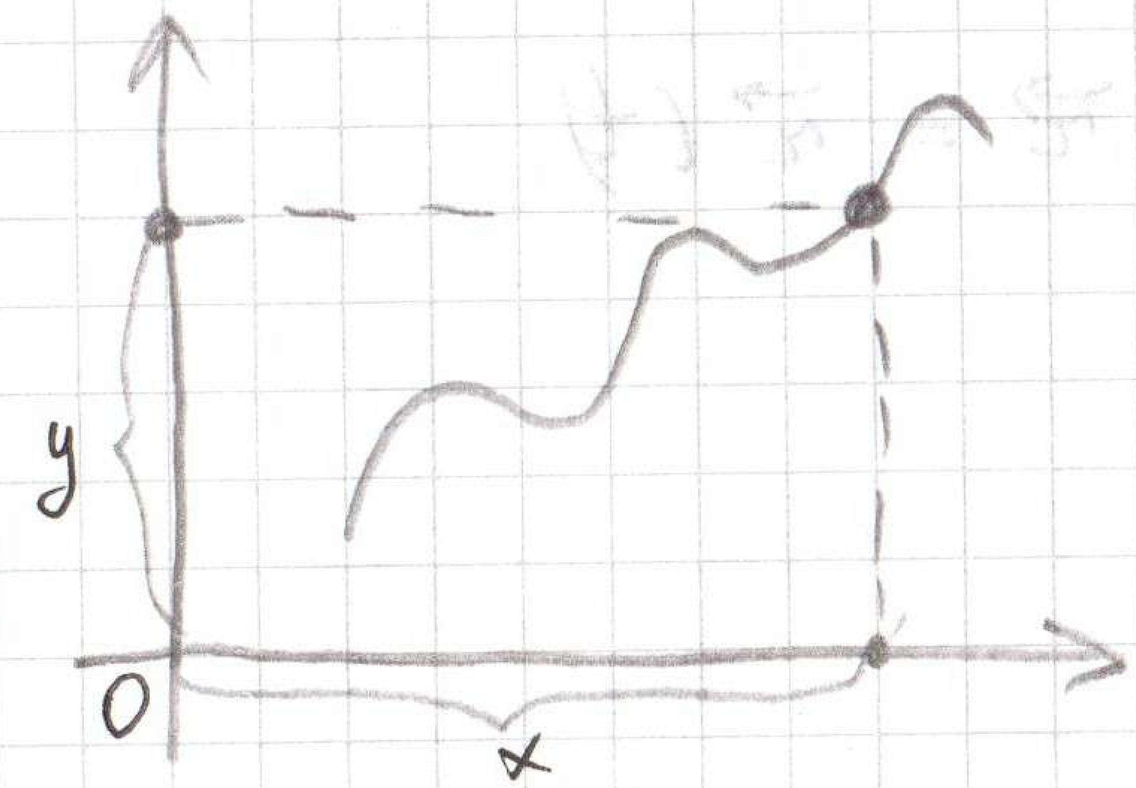
Метр – расстояние, которое проходит свет примерно за $\frac{1}{3 \cdot 10^8}$ секунду.

Чтобы измерить время, нужно сравнить его с продолжительностью некоторого процесса, принятого за эталон.

Секунда – это продолжительность приблизительно $10^{10}$ колебаний электрона в атоме цезия.

Закон движения: $x = x(t)$

Движение точки на плоскости.




x(м)

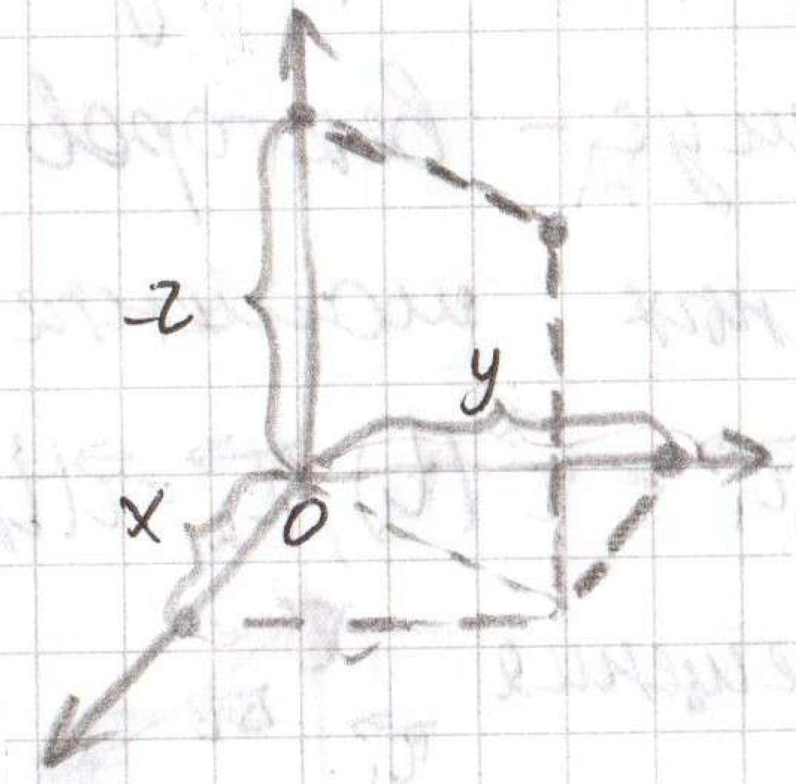
y(м)

$x = x(t)$; $y = y(t)$ – закон движения

Декартовы координаты: x и y

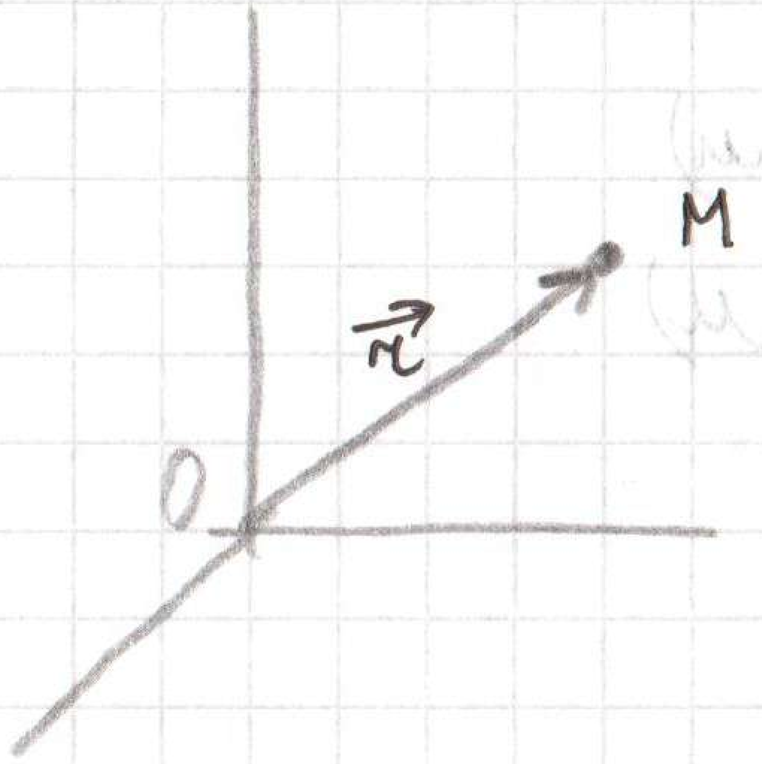
Ось координат – прямая линия, на которой выбрано начало отсчёта, положительное направление и единица измерения длины.

Движение точки в пространстве.



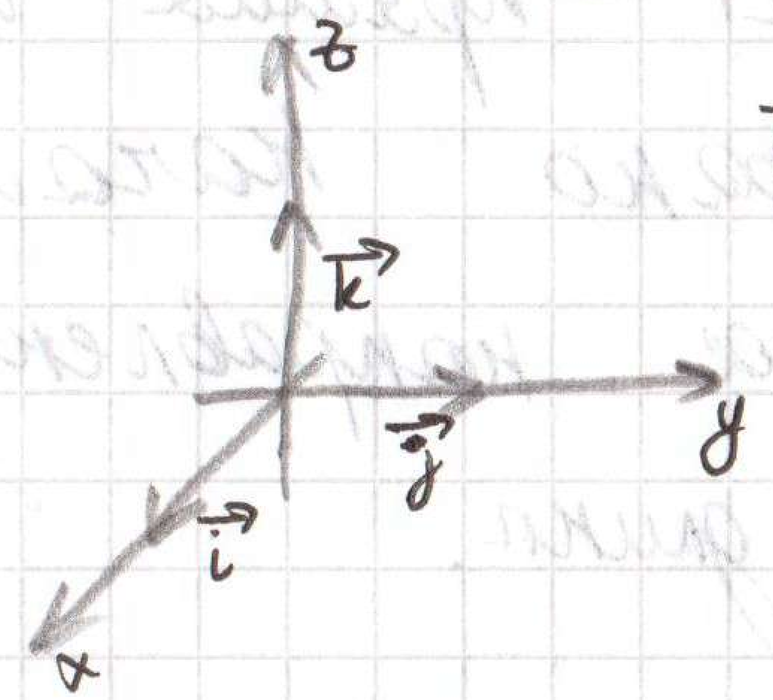
Радиус-вектор точки - вектор, проведённый от начала отсчёта к данной материальной точке.

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$




Орты декартовых координат - единичные векторы, направленные вдоль декартовых осей.

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$



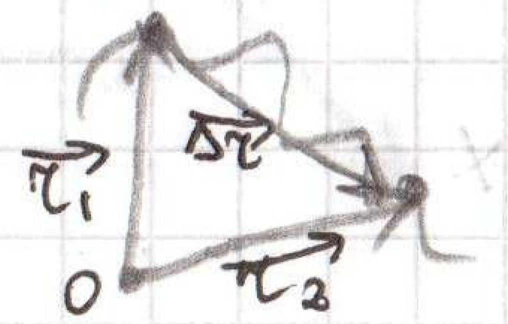

$$\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z$$

$$|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$$

Модуль радиус-вектора $|\vec{r}| = r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

Перемещение - разность радиус-векторов точки, взятых в два разных момента времени. $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$, $\vec{r}_1 = \vec{r}(t_1)$, $\vec{r}_2 = \vec{r}(t_2)$

$\Delta t = t_2 - t_1$ - длительность перемещения




Скорость - предел отношения перемещения мат. точки к его длительности, когда длительность перемещения стремится к нулю.

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}, \quad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$$

Декартовы компоненты скорости.

$$\vec{v} = \vec{i}v_x + \vec{j}v_y + \vec{k}v_z$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z) = \vec{i}\frac{dx}{dt} + \vec{j}\frac{dy}{dt} + \vec{k}\frac{dz}{dt}$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x} \quad \left[\frac{м}{с}\right]$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}$$

$$v_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}$$

Модуль скорости $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$ $\left[\frac{м}{с}\right]$

Ускорение - производная скорости точки по времени.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}$$

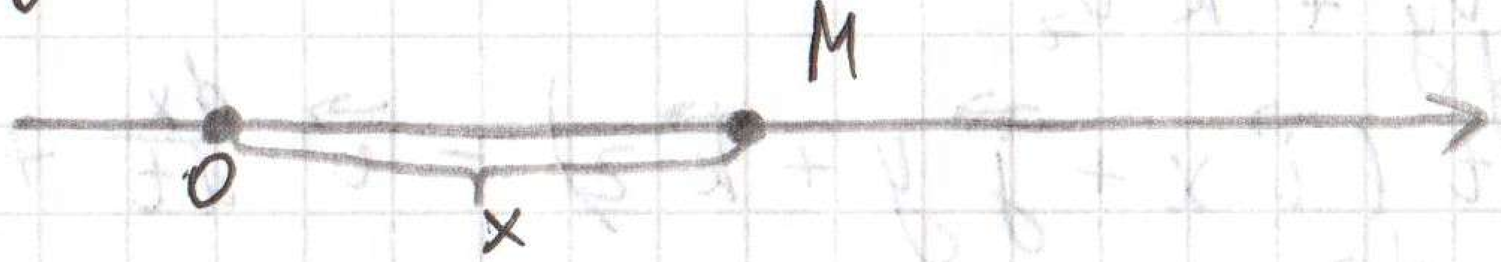
Декартовы компоненты ускорения.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{i}v_x + \vec{j}v_y + \vec{k}v_z) = \vec{i}\frac{dv_x}{dt} + \vec{j}\frac{dv_y}{dt} + \vec{k}\frac{dv_z}{dt}$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \dot{v}_x = \ddot{x}$$
$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \dot{v}_y = \ddot{y}$$
$$a_z = \frac{dv_z}{dt} = \dot{v}_z = \ddot{z}$$

Модуль ускорения $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$ $\left[\frac{м}{с^2}\right]$

Пример: прямолинейное равноускоренное движение.

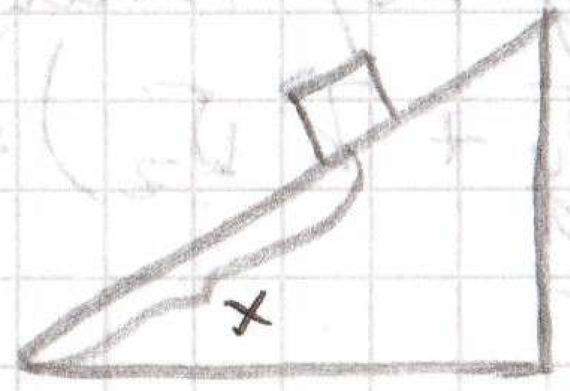


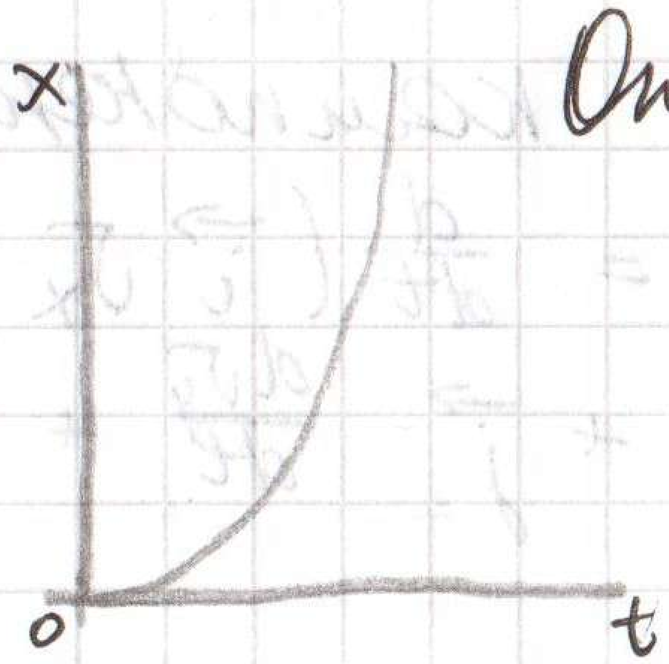

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} \rightarrow dv_x = a_x dt$$
$$v_x = a_x \int_0^t dt = a_x t$$
$$v_x = \frac{dx}{dt} \rightarrow dx = v_x \cdot dt = a_x t dt$$
$$x = a_x \int_0^t t dt = \frac{a_x t^2}{2}$$

$a_x = const$, $v_x = a_x t$, $x = \frac{a_x t^2}{2}$

Измерение ускорения: $a_x = \frac{2x}{t^2}$.

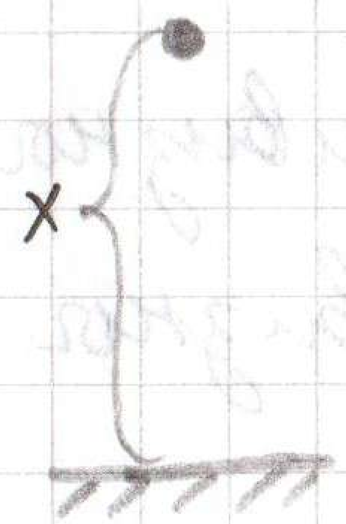
Пример.




Опыт: $x \sim t^2$

Ускорение свободного падения.



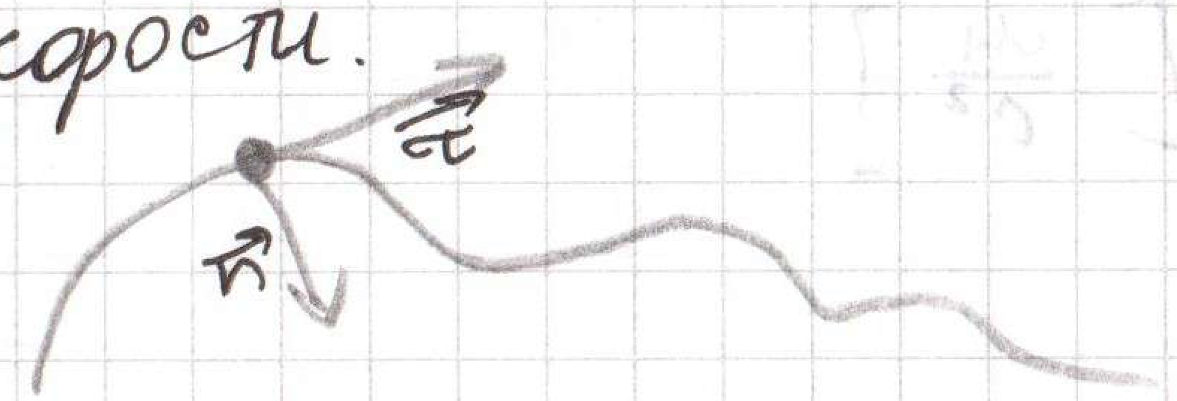

Опыт: $x \sim t^2$

$$\frac{2x}{t^2} = a = 9{,}8 \ \frac{м}{с^2} \equiv g$$
$$v = gt, \quad x = \frac{gt^2}{2}$$

Криволинейное движение.

Тангенциальной наз-ся компонент ускорения, параллельная вектору скорости.

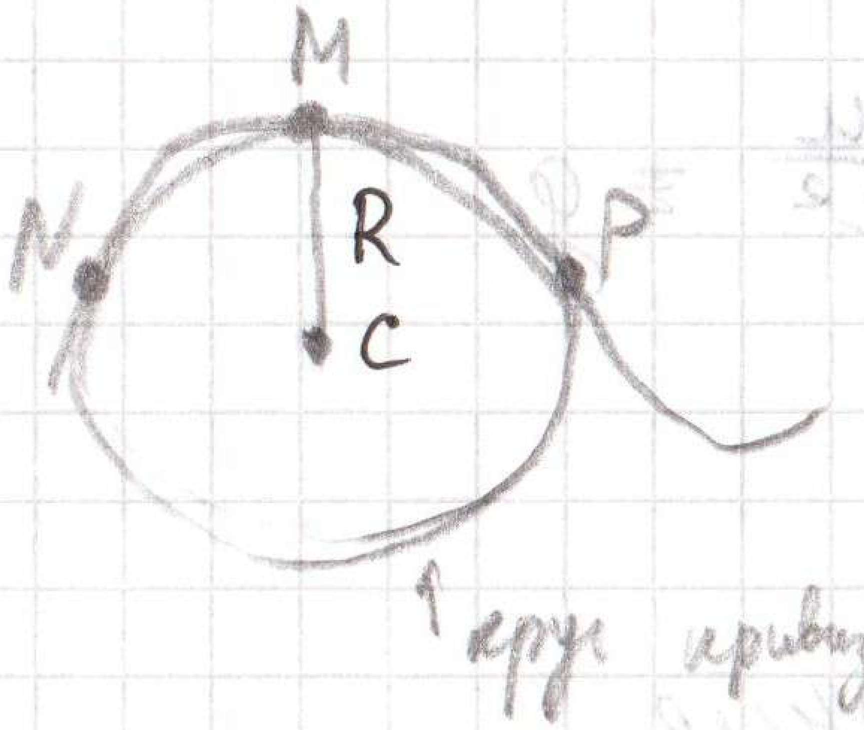
Нормальной наз-ся компонента ускорения, перпендикулярная вектору скорости.



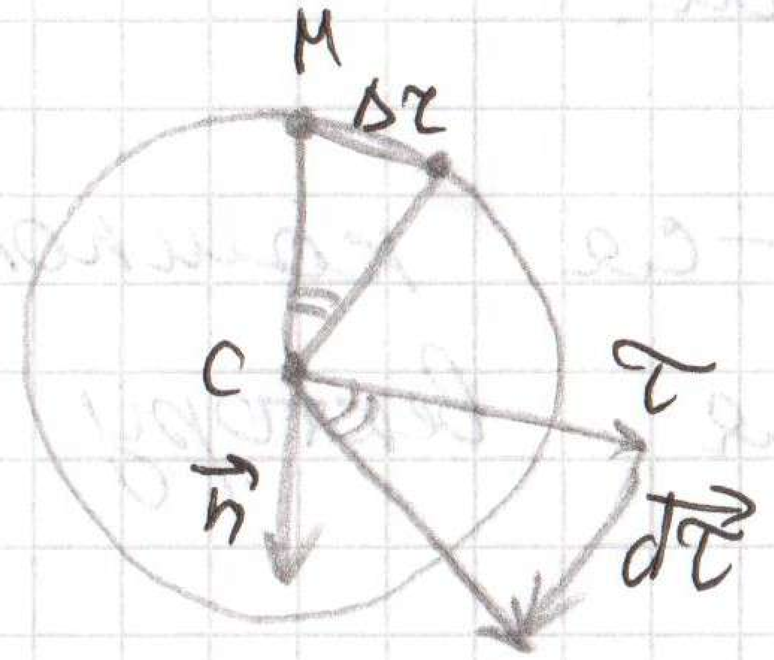

$|\vec{\tau}| = |\vec{n}| = 1$ - орты

$$\vec{a} = \vec{\tau} a_\tau + \vec{n} a_n$$
$$\vec{\tau} = \frac{\vec{v}}{v} \Rightarrow \vec{v} = \vec{\tau} v$$
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\tau} v) = \vec{\tau} \frac{dv}{dt} + v \frac{d\vec{\tau}}{dt}$$

Круг кривизны кривой в точке — круг, проходящий через данную точку M кривой и 2 другие точки кривой N и P в пределе, когда $N \to M$ и $P \to M$.




R – радиус кривизны
C – центр кривизны




$d\vec{\tau} = \vec{n} \cdot d\tau \qquad \frac{d\tau}{\tau} = \frac{dr}{R}$

$d\tau = \tau \frac{dr}{R} \qquad d\vec{\tau} = \vec{n}\frac{dr}{R}$

$\tau = 1$

$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \vec{n}\frac{1}{R}\frac{dr}{dt} = \vec{n}\frac{v}{R}$

$\vec{a} = \vec{\tau}\frac{dv}{dt} + v\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \vec{\tau}\frac{dv}{dt} + \vec{n}\frac{v^2}{R}$

$a_\tau = \frac{dv}{dt}, \quad a_n = \frac{v^2}{R}$

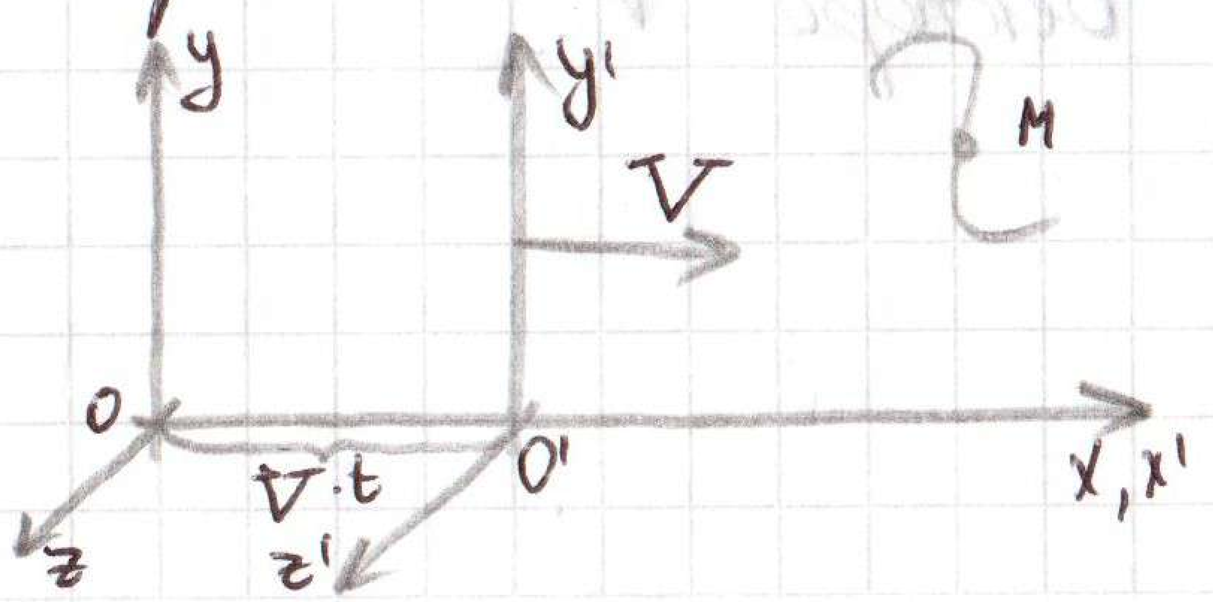
$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} \quad \left[\frac{м}{с^2}\right]$

$\cancel{\omega = gt}$

## §2. Принцип относительности. Преобразования Галилея и преобразования Лоренца.

Принцип относительности Галилея:
Никакими механическими опытами, проведёнными внутри данной системы отсчёта, нельзя установить, находится ли эта система в состоянии покоя или равномерно прямолинейно движется.

Математическая формулировка:
Ур-ия, выражающие физ. законы, должны быть инвариантны относительно преобразования, описывающего переход от неподвижной системы к системе, движущейся равномерно и прямолинейно.




$$\begin{cases} x = x' + Vt \\ y = y' \\ z = z' \end{cases} \qquad \begin{cases} v_x = v_{x'} + V \\ v_y = v_{y'} \\ v_z = v_{z'} \end{cases}$$

Преобр. Гал

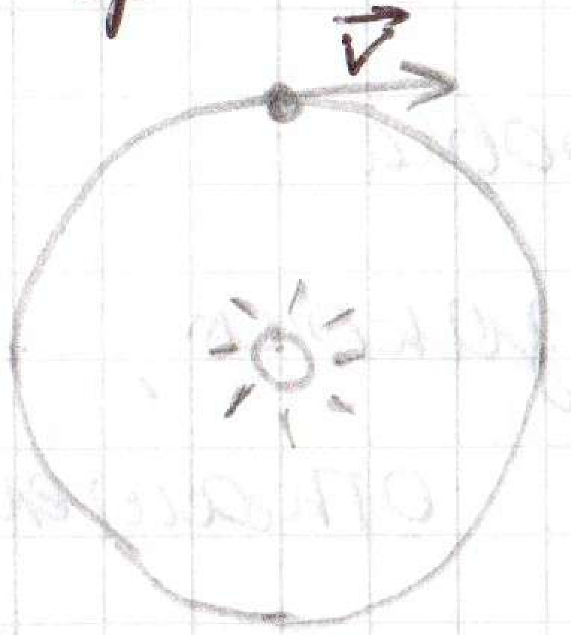
$\vec{v}_{абс} = \vec{v}_{отн} + \vec{v}_{с.о}$

Оказалось, что ур-ия электромагнитного поля не инвариантны относительно преобразования Галилея.

Было решено проверить правило сложения скоростей для световых волн.

Скорость света $c \approx 3 \cdot 10^8 \frac{м}{с}$

Майкельсон предложил использовать в качестве подвижной системы земной шар в его движении вокруг Солнца



$\vec{V} = 3 \cdot 10^4 \frac{м}{с}$

$\frac{V}{c} = 10^{-4}$ (!)

Майкельсон предложил сравнить продольную и поперечную скорости света, т.е. $v$ света относительно Земли вдоль и поперёк вектора $\vec{V}$.

Гипотеза неподвижного эфира

$$\begin{cases} v_x^2 + v_y^2 = c^2 \\ v_x = v_{x'} + V \\ v_y = v_{y'} \end{cases}$$

Продольная скорость света:

Положим $v_{y'} = 0$.

$-v_{x'} = -V \pm c$

$v_{\parallel} = |v_{x'}| = c \pm V$

Поперечная скорость света:

Положим $v_{x'} = 0$.

$v_{y'} = \pm\sqrt{c^2 - v^2}$

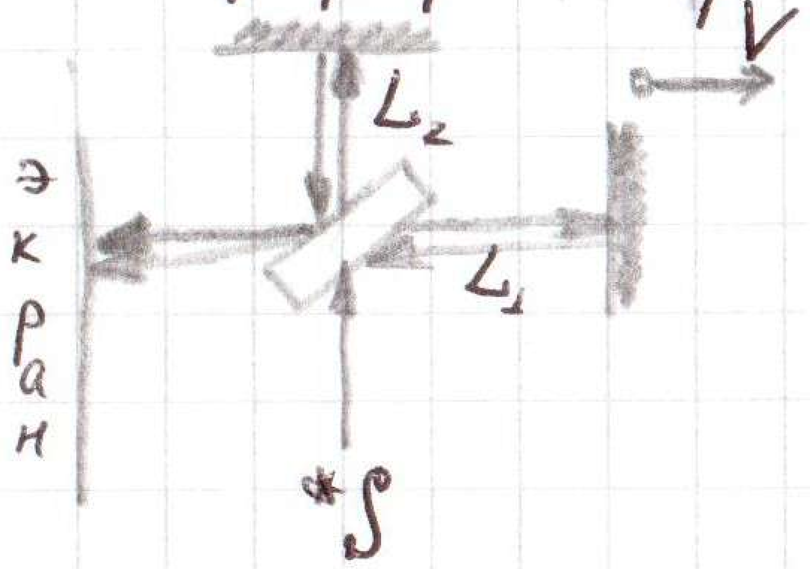
$v_{\perp} = \sqrt{c^2 - v^2}$

$v_{\parallel} \neq v_{\perp}$

В своём опыте Майкельсон использовал интерференцию света.

Интерференция – взаимная компенсация действия световых волн в некоторых точках пр-ва.

## Интерферометр Майкельсона




$$\frac{L_1}{c-V} + \frac{L_1}{c+V} = \frac{2L_2}{\sqrt{c^2-V^2}}$$

Повернули с.о. на 90°:

$$\frac{L_2}{c-V} + \frac{L_2}{c+V} = \frac{2L_1}{\sqrt{c^2-V^2}} + \frac{T}{2}$$

$T = \frac{\lambda}{c}$ – период световых колебаний

$\lambda = 0,5 \cdot 10^{-6}$ м – длина световой волны

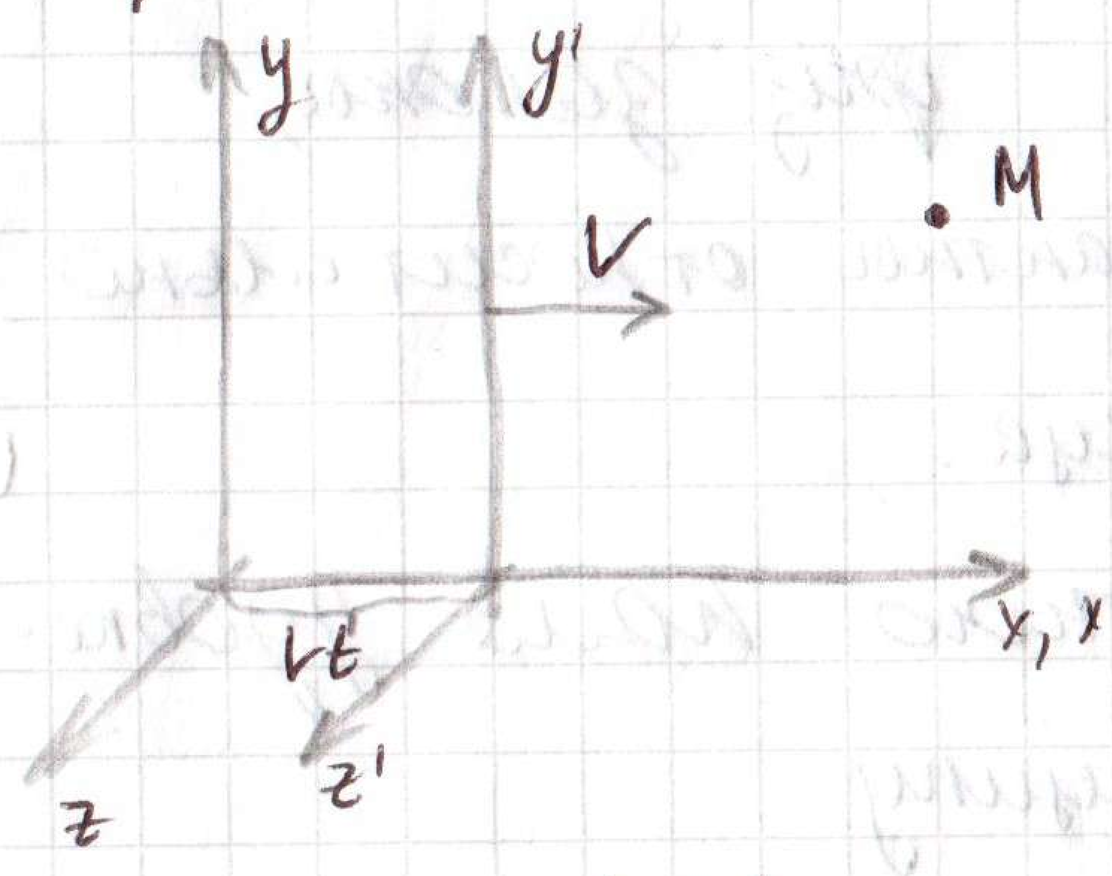
$L_1 \approx L_2 \approx 10$ м

Результат опыта Майкельсона состоял в том, что при поворотах прибора интерференционная картина не менялась. Т.о. гипотеза неподвижного эфира ошибочна.

Принцип постоянства скорости света. Скорость света не зависит от того, по отношению к какой системе отсчёта, покоящейся или движущейся, оно определяется. $v_{абс} = v_{отн} = c$

## Теория относительности.

Основная идея этой теории состоит в том, что движение влияет на время.




$x = ct$

$x' = ct'$ $\quad t \neq t'$ (!)

$x, y, z, t \overset{?}{\rightleftarrows} x', y', z', t'$

$$\begin{cases} x = x' + Vt' \\ t = t' + \frac{x'V}{c^2} \end{cases}$$

Обратное преобразование

$$\begin{cases} x' = x - Vt \\ t' = t - \frac{xV}{c^2} \end{cases}$$

Чтобы преобразования были обратимыми, введём в них постоянный коэффициент:

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad t = \frac{t' + x'\frac{V}{c^2}}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

Обратное:

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1+V^2/c^2}}, \quad t' = \frac{t - \frac{xV}{c^2}}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$$

Это - преобразования Лоренца.

Принцип относительности Эйнштейна:
Ур-ия, выражающие физ. законы, должны быть инвариантны относительно преобразования Лоренца.
Ур-ия электромагнитного поля удовлетворяют этому принципу.

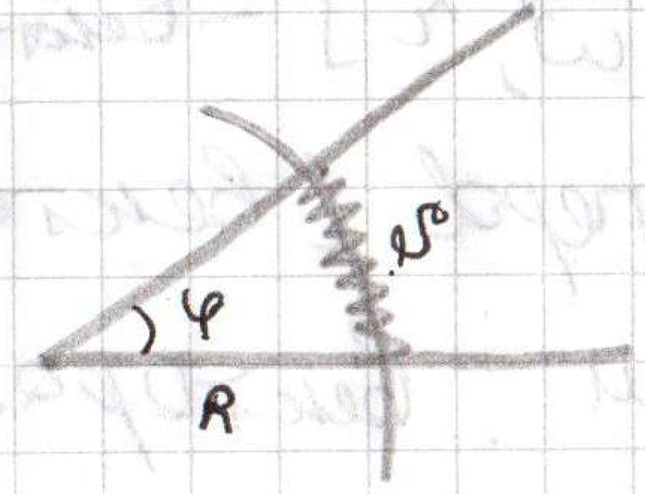
## §3. Кинематика твёрдого тела

Поступательное движение - движение, при котором ориентация тела в пр-ве остаётся неизменной.
При таком движении скорости всех точек тела одинаковы.

Вращение тела вокруг неподвижной оси - движение, при котором все точки тела движутся по окружности, а центры всех окружностей лежат на одной прямой, называемой осью вращения.

Угол радиан - это отношение длины дуги окружности, попадающей в пределы угла, к радиусу этой окружности

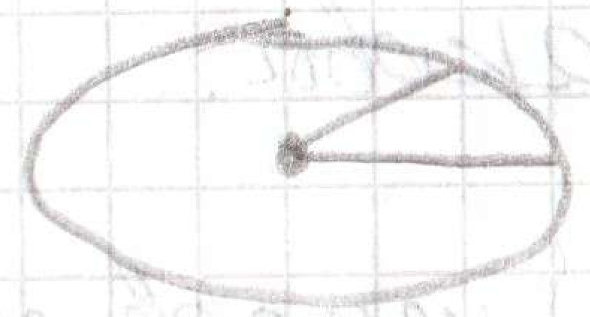
$$\varphi = \frac{S}{R}$$



Угловая скорость вращения тела - это производная угла поворота тела по времени.

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} \; \left(\frac{рад}{с}\right)$$

Связь линейной и угловой скорости



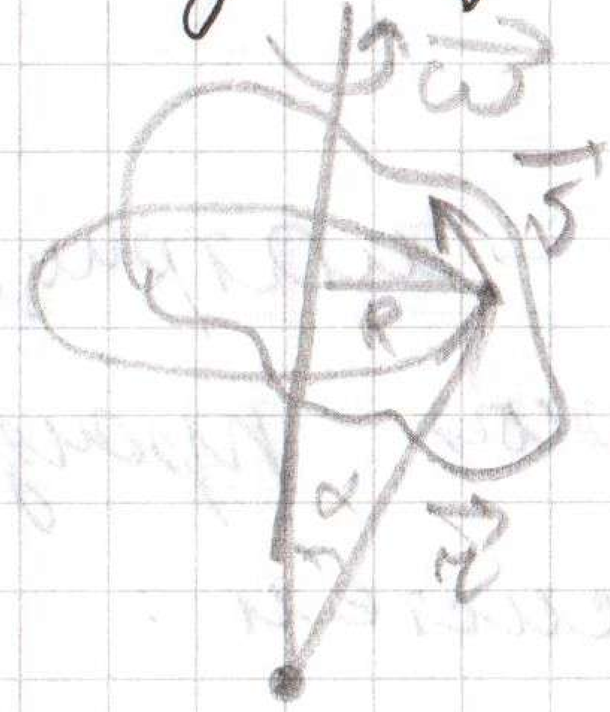
$$v = \frac{dr}{dt} \qquad dv = R\,d\varphi$$

$$v = R\frac{d\varphi}{dt} = R\omega$$

$$v = \omega R$$

Вектор угловой скорости $\vec{\omega}$ - это вектор, направленный вдоль оси вращения тела по правилу правого винта и равный по модулю угловой скорости.

Для любой точки тела вектор скорость равен $\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{r}]$ - векторное произведение векторов (вектор, перпендикулярный обоим векторам-сомножителям и направленный по правилу правого винта, модуль равен произведению модулей векторов на синус угла между ними.




$$v = \omega r \sin\alpha$$

$$v = \omega R$$

Движение тела с одной неподвиж-ной точкой

Теорема Эйлера: движение тела с одной неподвижной точкой в любой момент времени можно рассматривать как вращение вокруг оси, проходящей через точку закрепления.

$\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{r}]$

$\vec{\omega} = \vec{\omega}(t)$ - мгновенная угловая скорость

Мгновенная ось вращения - это прямая

на которой лежат точки тела, неподвижные в данный момент.

Чтобы описать ориентацию тела в пр-ве, введём понятие матрицы поворота тела.

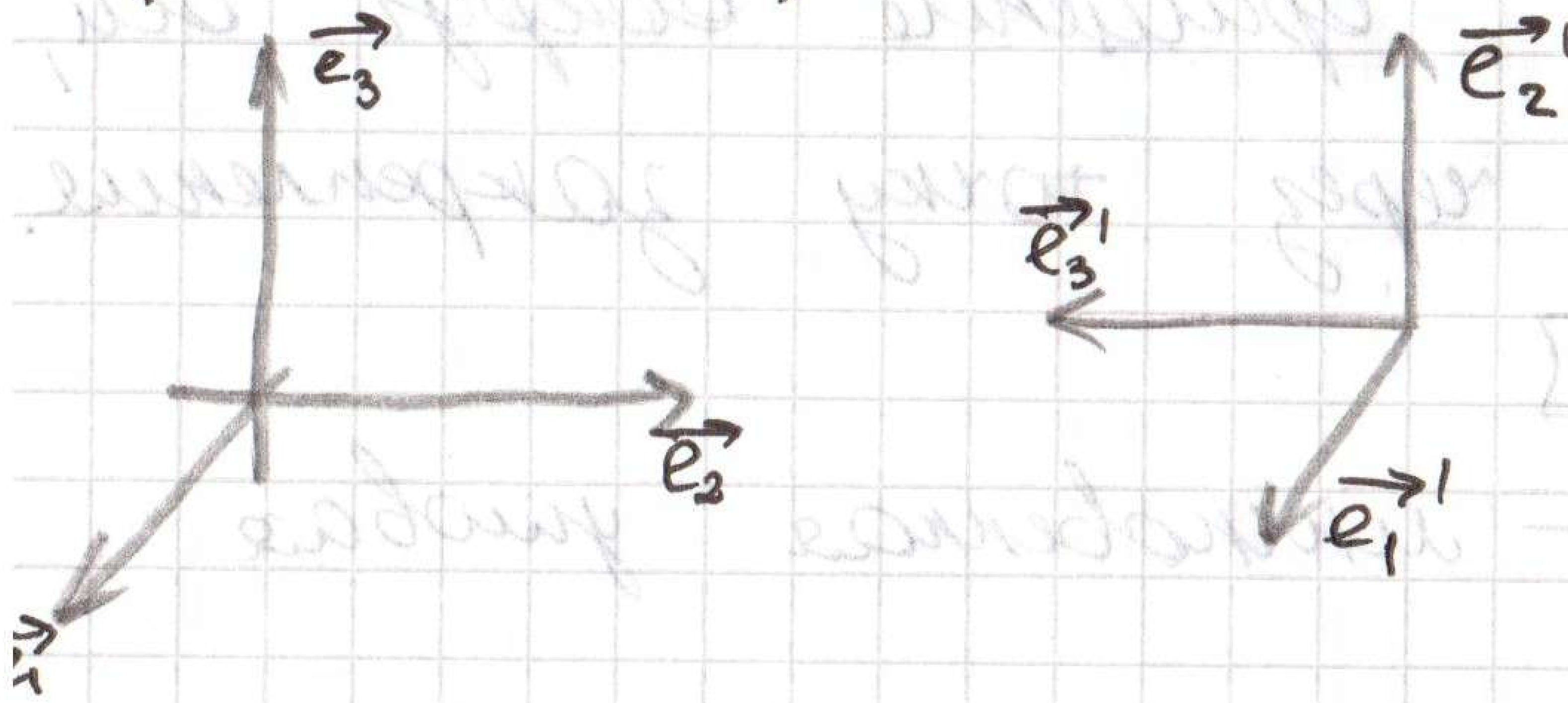
Матрица поворота тела — матрица, составленная из скалярных произведений ортов 2 коорд. систем: лабораторной и системы, связанной с телом.

$S_{ij} = \vec{e_i}\,\vec{e_j}'$

$\vec{e_i}$ — лабораторные орты

$\vec{e_j}'$ — орты тела

Пример: поворот тела

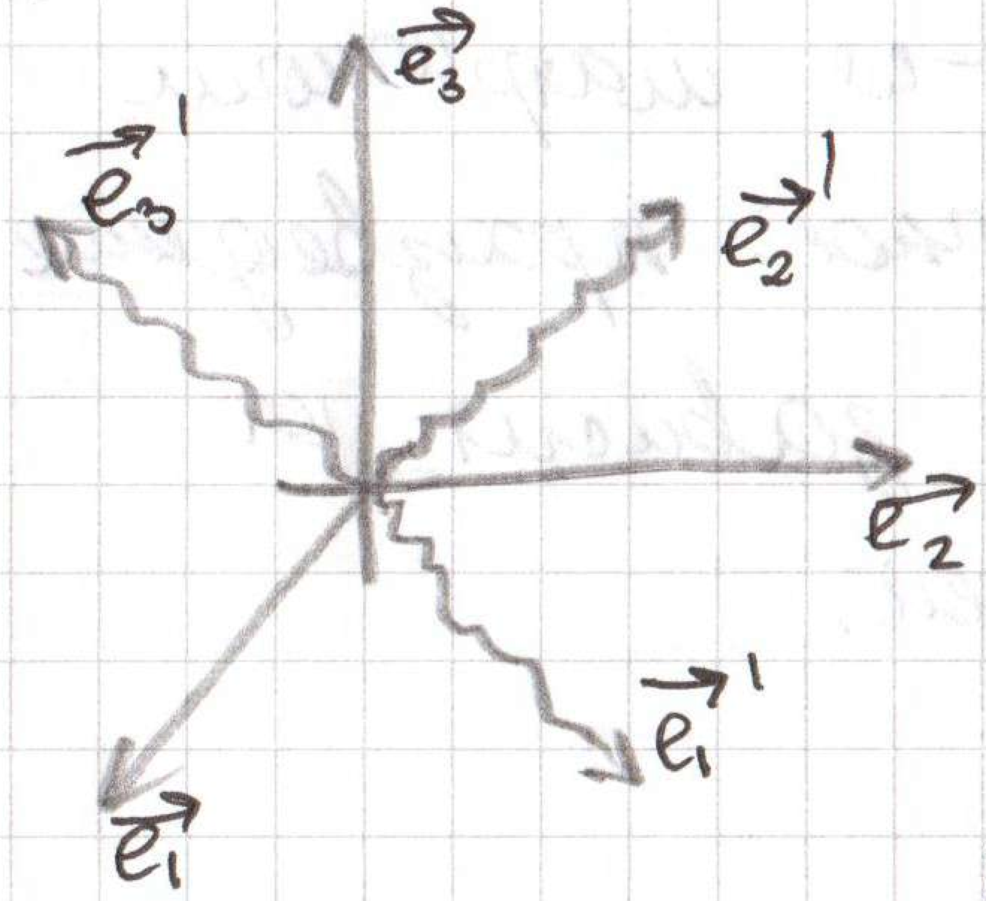



$$S_{ij} = \begin{bmatrix} \vec{e_1}\vec{e_1}' & \vec{e_1}\vec{e_2}' & \vec{e_1}\vec{e_3}' \\ \vec{e_2}\vec{e_1}' & \vec{e_2}\vec{e_2}' & \vec{e_2}\vec{e_3}' \\ \vec{e_3}\vec{e_1}' & \vec{e_3}\vec{e_2}' & \vec{e_3}\vec{e_3}' \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Закон движения тела: $S = S(t)$

Преобразование компонент вектора при повороте системы координат




$$\vec{r} = \vec{e_1}x_1 + \vec{e_2}x_2 + \vec{e_3}x_3 = \vec{e_1}'x_1' + \vec{e_2}'x_2' + \vec{e_3}'x_3' \quad (*)$$

Умножим (*) скалярно на орт $\vec{e_1}$.

$$x_1 = \vec{e_1}\vec{e_1}'x_1' + \vec{e_1}\vec{e_2}'x_2' + \vec{e_1}\vec{e_3}'x_3' = S_{11}x_1' + S_{12}x_2' + S_{13}x_3' = \sum_{j=1}^{3} S_{1j}x_j'$$

$$x_i = \sum_{j=1}^{3} S_{ij}\,x_j'$$

Двойной поворот

$\hat{A}$ — первый поворот

$\hat{B}$ — второй поворот

$\hat{C} = ?$

$$x_i = \sum_{j=1}^{3} A_{ij} x_j'$$

$$x_j' = \sum_{k=1}^{3} B_{jk} x_k''$$

$$x_i = \sum_{j=1}^{3} A_{ij} \sum_{k=1}^{3} B_{jk} x_k'' = \sum_{k=1}^{3} x_k'' \underbrace{\sum_{j=1}^{3} A_{ij} B_{jk}}_{C_{ik}}$$

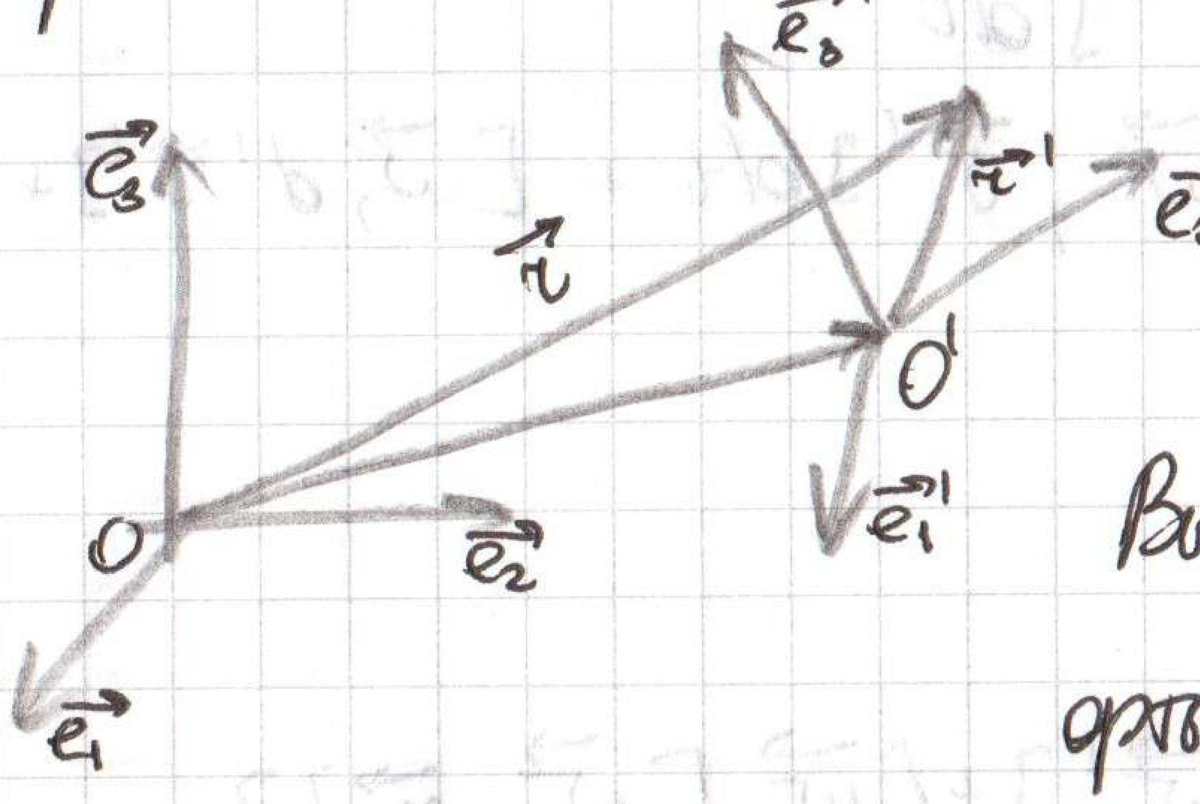
$$x_i = \sum_{k=1}^{3} c_{ik} x_k''$$

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{3} A_{ij} B_{jk}$$

Такая величина наз-ся матричным произведением. Матричное произведение некоммутативно, т.е. зависит от порядка сомножителей.

## §4. Кинематика вращающихся систем отсчёта.

Найдём связь кинематических характеристик точки в неподвижной и вращающейся системе отсчёта.




$$\vec{r} = \vec{r_0} + \vec{r}'$$

$$d\vec{r} = d\vec{r_0} + d\vec{r}'$$

Выразим $\vec{r}'$ через орты подвижной системы

$$\vec{r}' = \vec{e_1}' x_1' + \vec{e_2}' x_2' + \vec{e_3}' x_3'$$

$$d\vec{r}' = \underbrace{\vec{e_1}' dx_1' + \vec{e_2}' dx_2' + \vec{e_3}' dx_3'}_{d'\vec{r}'} + x_1' d\vec{e_1}' + x_2' d\vec{e_2}' + x_3' d\vec{e_3}'$$

$$§3 \to \vec{v} = (\vec{\omega}, \vec{r}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \to d\vec{r} = (\vec{\omega}, \vec{r})dt$$

В частности, $d\vec{e_1} = (\vec{\omega}, \vec{e_1}')dt$, $d\vec{e_2} = (\vec{\omega}, \vec{e_2}')dt$, $d\vec{e_3} = (\vec{\omega}, \vec{e_3}')dt$

$$d\vec{r}^{*} = d\vec{r_0} + d'\vec{r}' + (\omega, \vec{r}')dt$$

Скорость. (:dt)

$\vec v = \vec v_0 + \vec v' + [\vec\omega, \vec r']$

$d\vec v = d\vec v_0 + d\vec v' + [\vec\omega, d\vec r']$ $(\vec\omega = const)$

$d\vec r' = d'\vec r' + [\vec\omega, \vec r]dt$

Аналогично

$d\vec v' = d'\vec v' + [\vec\omega, \vec v']dt$

$d\vec v = d\vec v_0 + d'\vec v' + [\vec\omega, \vec v']dt + [\vec\omega, d'\vec r'] +$

$+ [\omega$

Ускорение (:dt)

$\vec a = \vec a_0 + \vec a' + 2[\vec\omega, \vec v'] + [\vec\omega, [\vec\omega, \vec r]]$

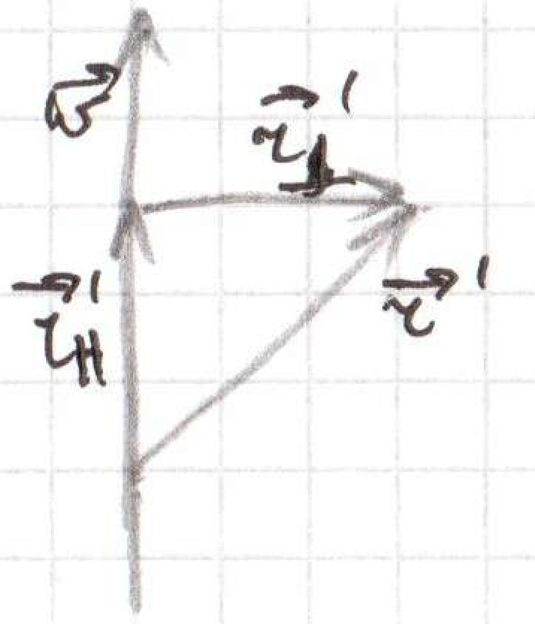
$\vec a_п = \vec a_0 + [\vec\omega, [\vec\omega, \vec r]]$ –

$\vec a_к = 2[\vec\omega, \vec v']$

$\vec a = \vec a' + \vec a_п + \vec a_к$

абсолютное, относительное

Центростремительное ускорение




$\vec r' = \vec r_п' + \vec r_\perp'$

$[\vec\omega, \vec r'] = [\vec\omega, \vec r_\perp']$

$[\vec\omega, [\vec\omega, \vec r']] = [\vec\omega [\vec\omega, \vec r_\perp']]$

$[\vec a, [\vec b, \vec c]] = \vec b(\vec a, \vec c) - \vec c(\vec a, \vec b)$

$[\vec\omega, [\vec\omega, \vec r]] = [\vec\omega, [\vec\omega, \vec r_\perp']] = \vec\omega \underbrace{(\vec\omega, \vec r_\perp')}_{=0} -$

$- \vec r_\perp' \omega^2$

$[\vec\omega, [\vec\omega, \vec r']] = -\omega^2 \vec r_\perp' = \vec a_ц$

## §5 Законы Ньютона

① Всякое тело сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока другие тела не заставят его изменить это состояние.

② Произведение массы мат. точки на ускорение равно действующей на неё силе: $m\vec{a} = \vec{F}$

③ Действие двух тел друг на друга равны и противоположно направлены

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

Эти законы являются обобщением опытных данных.

Сила и масса

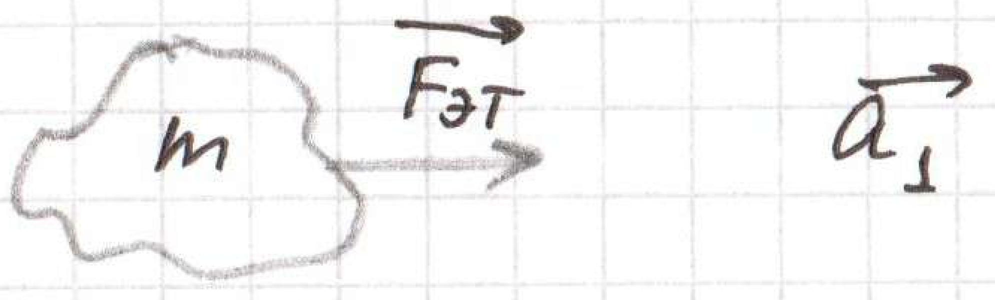
Масса - мера отклика тела на действие силы.

Сила - мера действия на данное

тело других тел.

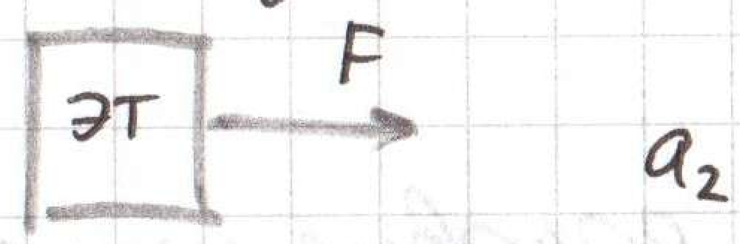
Измерение сил и масс.

Чтобы измерить любую физ. величину, необходимо ввести единицу измерения.
Килограмм - масса эталонного тела, представляющего собой цилинд из сплава платины и иридия диаметром 39 мм и такой же высоты.
Ньютон - сила, вызывающая ускорение $1 \frac{м}{с^2}$ у тела массой в 1 кг.
Измерение массы.
Чтобы измерить массу любого тела, нужно подействовать на него эталонной силой.




$m = \frac{F_{эт}}{a_1}$

Измерение силы.
Чтобы измерить силу, подействуем ей на эталонную массу.




$F = m_{эт} a_2$

Экспериментальная проверка 2ого закона Ньютона.
II закон Ньютона нарушается в 2 случаях:
- при движении тел с очень большими скоростями (близкими к c)
- для маленьких тел, движущихся в малых областях пространства

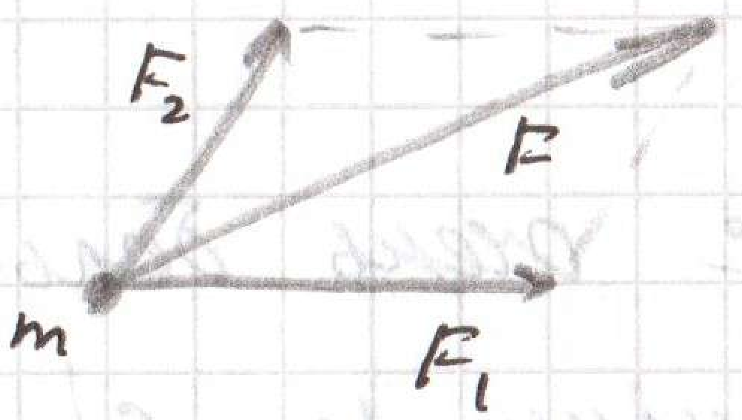
Импульс мат. точки
Импульс мат. точки - произведение массы мат. точки на её скорость.
II закон Ньютона сформулируем теперь так:
Скорость изменения импульса мат. точки

равна действующей на неё силе.

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \dot{\vec{p}} = \vec{F}$$

Сложение сил.

Если на мат. точку одновременно действуют 2 силы, то точка начинает двигаться так, как если бы действовала одна сила, равная векторной сумме первых двух сил.



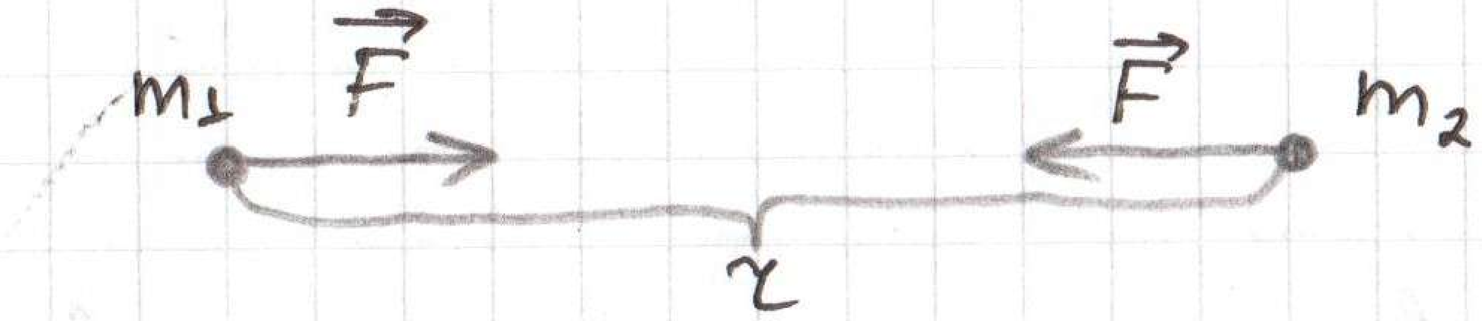

$$\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$$

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F_i}$$

## §6. Силы в механике

Гравитационные силы

Закон всемирного тяготения: Любые две мат. точки притягиваются друг к другу с силой, прямо пропорциональной их массам и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними.

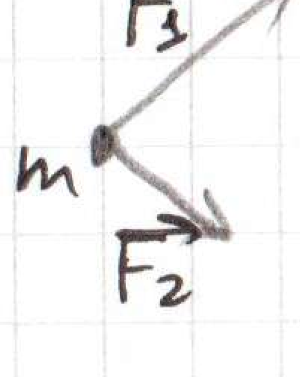



$$F \sim \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

$G = 6{,}6 \cdot 10^{-11} \frac{Н \cdot м^2}{кг^2}$ – гравитационная постоянная

Принцип суперпозиции: Каждая пара частиц взаимодействует независимо, т.е так, как если бы других частиц не было.

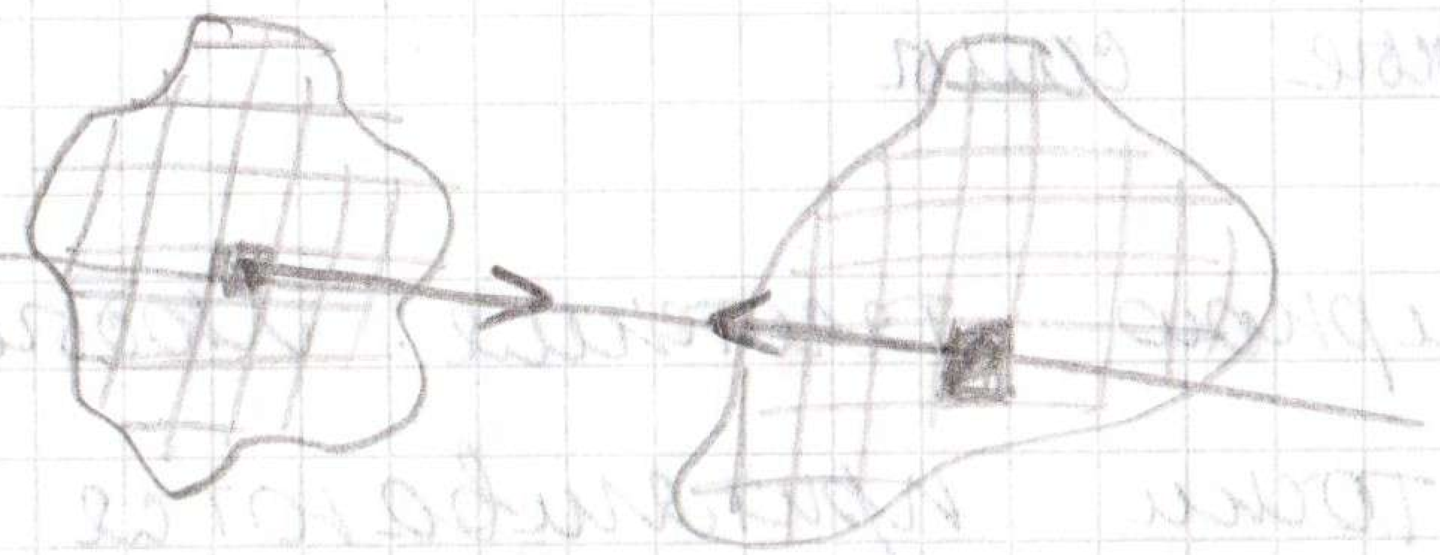



$$\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$$

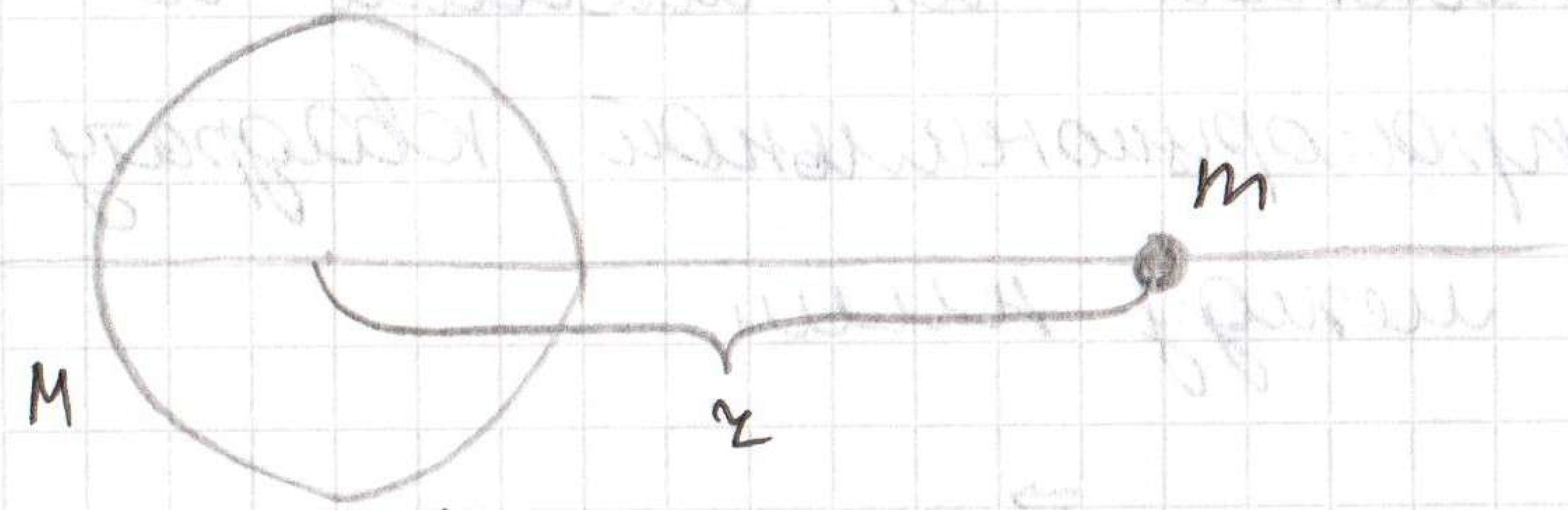
Пример

$$F_{ij} = G\frac{m_i m_j}{r_{ij}^2}$$

$$F = \sum_i \sum_j \vec{F_{ij}}$$



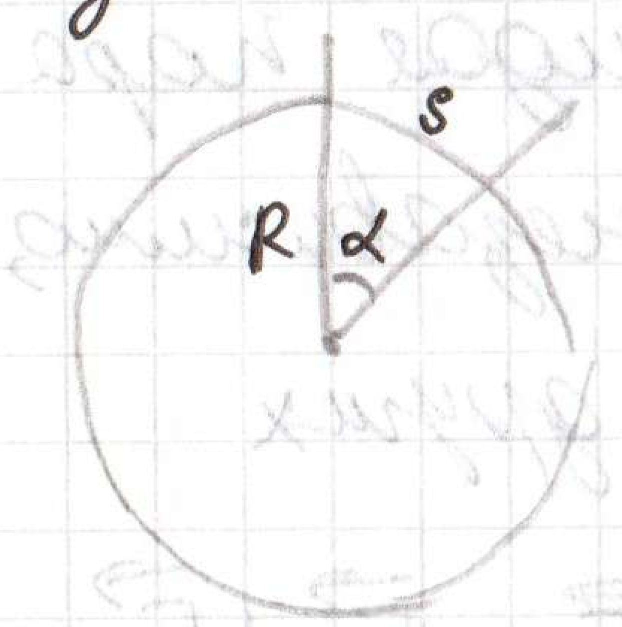
Притяжение точки к шару.




$$F = G\frac{Mm}{r^2}$$

Рассчёт показывает, что точка притягивается к шару так, как если бы вся масса шара находилась в его центре.

Взвешивание Земли.



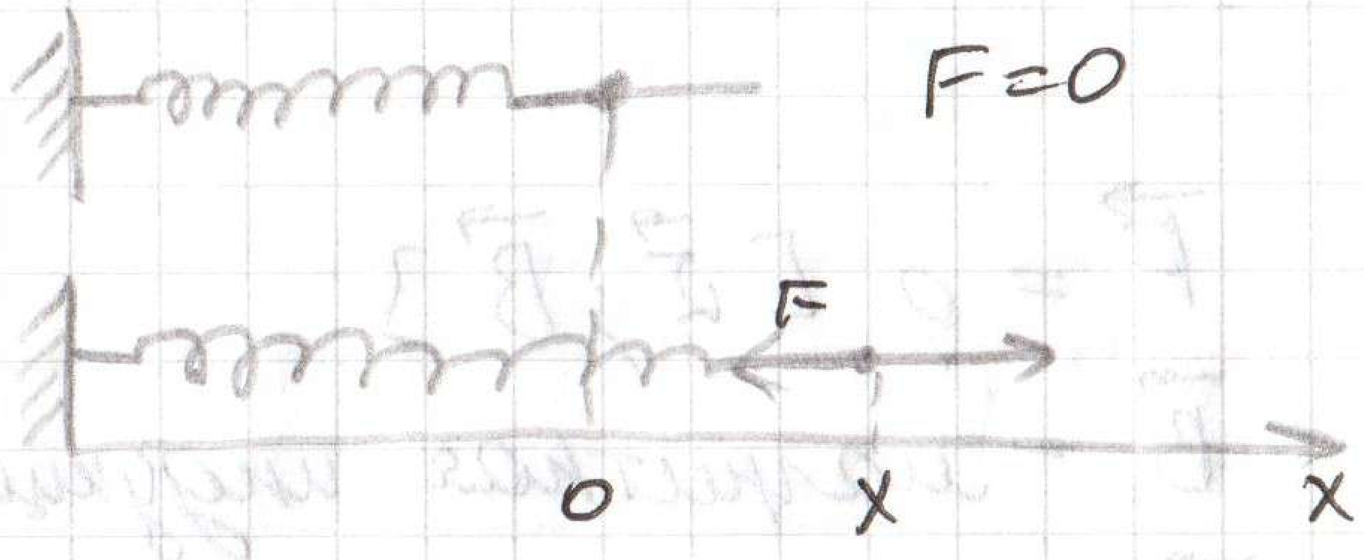

$$\alpha = \frac{S}{R}$$

$$R = \frac{S}{\alpha}$$

$$M = 6 \cdot 10^{24} \text{ кг}$$

$$F = mg = G\frac{Mm}{R^2}$$

$$M = \frac{gR^2}{G}$$




F=0

$F_x = -kx$

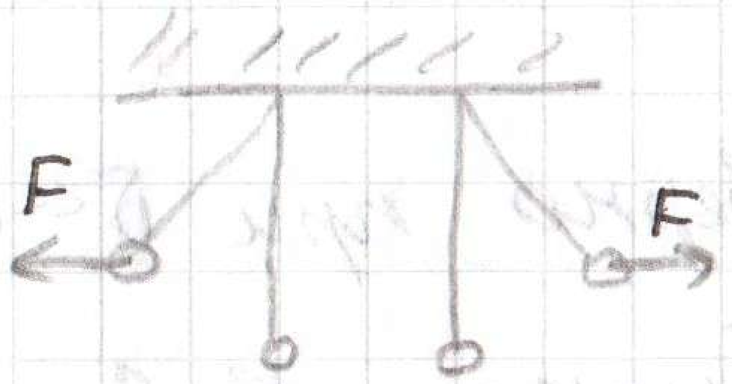
$k$ – коэффициент упругости

$[k] = \frac{Н}{м}$

Электромагнитные силы.

Сила Кулона

Электрический заряд $q$ – мера электрического взаимодействия тел.



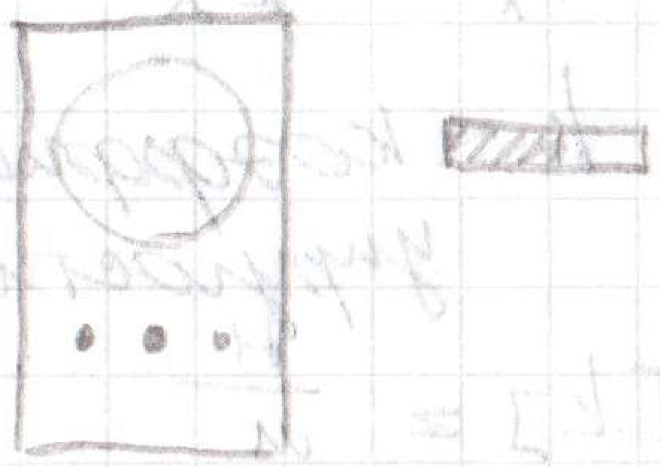

Электрическое поле – поле, создаваемое электрическими зарядами и проявляющее себя действием на электр. заряд.

Напряжённость эл. поля – мера действия поля на заряд.

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$

$\vec{F} = \vec{E}q$ – сила Кулона

## Сила Лоренца



$\vec{F} = q\,[\vec{v}\,; \vec{B}]$

$\vec{B}$ – магнитная индукция

$\vec{v}$ – скорость заряда

Частица в электромагнитном поле.

$\vec{F} = q\vec{E} + q\,[\vec{v}\,; \vec{B}]$

Уравнение движения

$m\vec{a} = \vec{F} = q\vec{E} + q\,[\vec{v}\,, \vec{B}]$

Опыт показывает, что это верно при $v \ll c$.

При скоростях частицы, близких к $c$, это ур-е теряет силу и вместо него мы должны пользоваться другим.

Релятивистское ур-е движения

$\dot{\vec{p}} = \vec{F}$, $\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ – релятивистский импульс

$m$ – масса точки, $v$ – её скорость

$\vec{F} = q\vec{E} + q\,[\vec{v}\,; \vec{B}]$

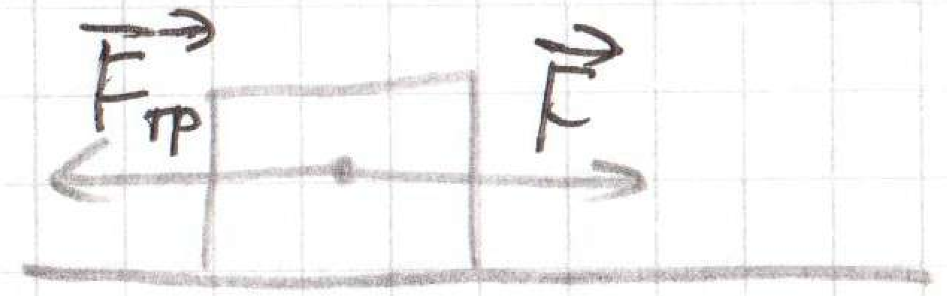
## Силы трения

Силы трения – силы, препятствующие относительному перемещению соприкасающихся тел.

### Сухое трение

Трение покоя – трение в отсутствие относительного перемещения соприкасающихся тел.

$\vec{F}_{тр} = -\vec{F}$




Как показывает опыт, сила трения покоя ограничена некоторой max величин

$F_{тр} \le F_{max}$, $F_{max}$ – ?

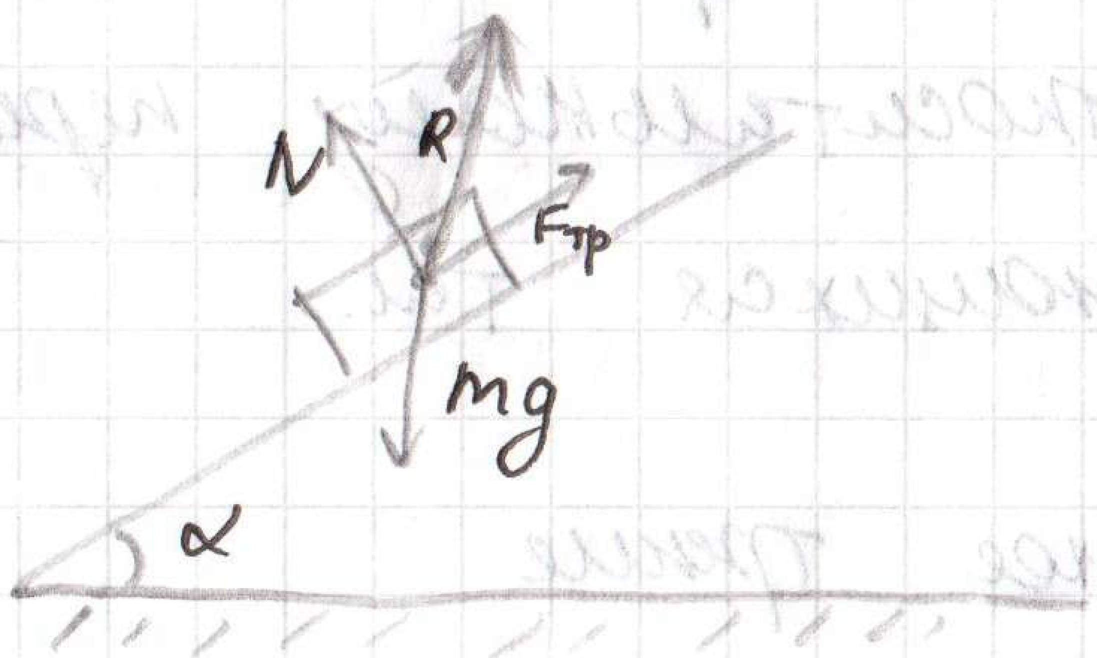
Сила нормального давления – это составляющая сила взаимодействия соприкасающихся тел $\perp$ поверхности соприкосновения. $N$.

Опыт показывает $F_{max} \sim N$

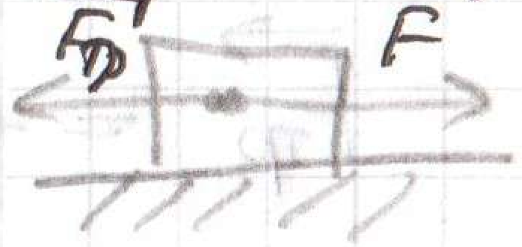
$F_{max} \approx \mu N$, где $\mu$ - коэффициент трения $[\mu]=1$

R - сила реакции

$\mu = tg\,\alpha$




Трение скольжения - трение при наличии относительного перемещения соприкасающихся тел.




Упругое тело

Опыт показывает, что $F_{тр} \approx \mu N = F_{max}$

Силы упругости

Сила упругости - силы, препятствующие деформации упругих тел.

Упругое тело - тело, которое восстанавливает свою форму после прекращения действия силы.

Закон Гука: Сила упругости пропорциональна величине деформации упругого тела.

## §7 Неинерциальная система отсчёта
## Сила инерции

Система отсчёта инерциальная, если в этой системе всякое тело, бесконечно удалённое от других тел, не испытывает ускорения. Опыт показывает, что система, связанная с Землёй, инерциальна, по крайней мере, приближённо.

Выведем ур-е движения ~~точки~~ тела отн. неинерциальной с.о.

$m\vec{a} = \vec{F}$ ИСО

$\vec{a}'$ - ускорение точки отн. НИСО

$m\vec{a} + m\vec{a}' - m\vec{a}' = \vec{F}$

$m\vec{a}' = \vec{F} - \underbrace{m(\vec{a} - \vec{a}')}_{\text{сила инерции}}$

$\vec{F}_{ин} = -m(\vec{a} - \vec{a}')$ - сила инерции

$m\vec{a}' = \vec{F} + \vec{F}_{ин}$

Силой инерции наз-ся добавочная сила, действующая на мат. точку в НИСО

§4 → $\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_{пер} + \vec{a}_к$

$\vec{F}_{ин} = -m(\vec{a}_n + \vec{a}_к) = \vec{F}_n + \vec{F}_к$

$\vec{F}_n = -m\vec{a}_n$ – переносная сила инерции

$\vec{F}_к = -m\vec{a}_к$ – кориолисова сила инерции

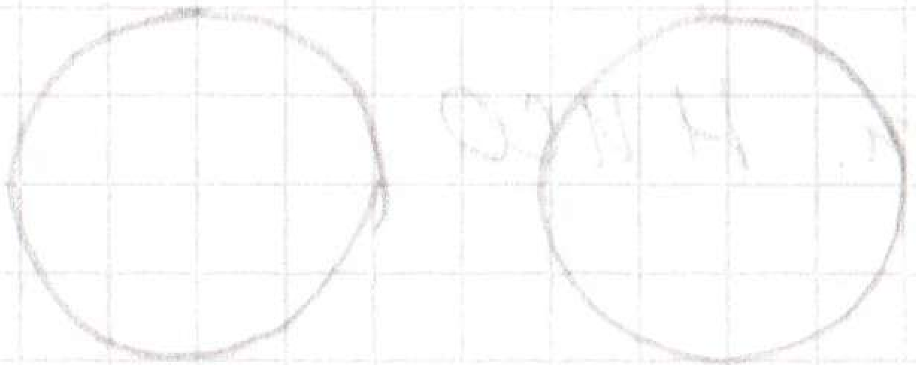
$$\begin{cases} \vec{a}_n = \vec{a}_0 - \omega^2 \vec{r}\,'_\perp \\ \vec{a}_к = -2[\vec{\omega}, \vec{v}\,'] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{F}_n = -m\vec{a}_0 - m\omega^2 \vec{r}\,'_\perp \\ \vec{F}_к = -2m[\vec{\omega}, \vec{v}\,'] \end{cases}$$

Центробежная сила инерции

$\vec{F}_{цб} = m\omega^2 \vec{r}\,'_\perp$

Маятник Фуко



Сила Кориолиса при движении маятника направлена вправо по ходу движ.

Невесомость – исчезновение веса тела за счёт ускорения с.о.

Перегрузка – увеличение веса тела, вызванное ускорением с.о.

## §8. Импульс системы частиц. Движение центра масс

Импульс точки $\vec{p} = m\vec{v}$ [кг · м/с]

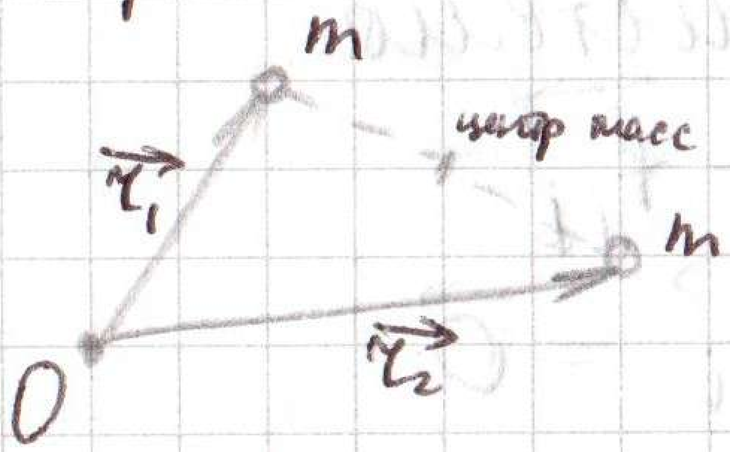
Импульс системы частиц – сумма импульсов отдельных частиц системы

$\vec{p} = \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i \vec{v}_i$

Центр масс системы частиц –

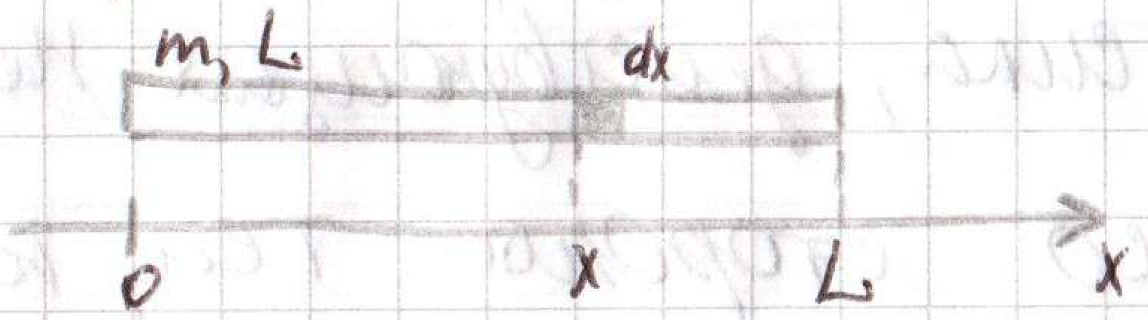
$\vec{r}_c = \frac{1}{m} \sum_i m_i \vec{r}_i$, где $m = \sum_i m_i$

Пример:




$\vec{r}_c = \frac{m\vec{r}_1 + m\vec{r}_2}{2m} = \frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2}{2}$

Пример: стержень




$dm = \frac{m}{L} dx$

$x_0 = \frac{1}{m} \sum_i m_i x_i = \frac{1}{m} \int x\,dm = \frac{1}{L} \int_0^L x\,dx = \frac{L}{2}$

Скорость и ускорение центра масс

$$\vec{v_c} = \dot{\vec{r_c}} = \frac{1}{m} \sum_i m_i \vec{v_i}$$

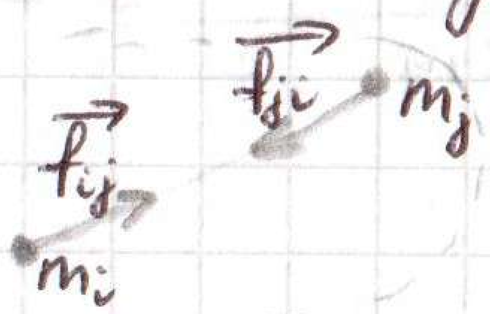
$$\vec{a_c} = \dot{\vec{v_c}} = \frac{1}{m} \sum_i m_i \vec{a_i}$$

$$\vec{p} = \sum_i m_i \vec{v_i} = m\vec{v_c} = \vec{p}$$

Импульс механической системы равен произведению массы системы на вектор скорости центра масс

Закон движения центра масс.

Внутр. сила - сила взаимодействия между телами данной системы.




$$\vec{f_{ij}} = -\vec{f_{ji}}$$

$$\vec{f_{ij}} + \vec{f_{ji}} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \sum_i \sum_j f_{ij} = \vec{0}$$

Внешняя сила - сила, действующая на тела системы со стороны тел, не входящих в данную систему


$$m_i \vec{a_i} = \vec{F_i} + \sum_j \vec{f_{ij}}$$

$$\sum_i m_i \vec{a_i} = \sum_i \vec{F_i} + \underbrace{\sum_i \sum_j f_{ij}}_{=0} = \vec{F_{внеш}} = m\vec{a_c}$$

Центр масс системы частиц движется так, как если бы в этой точке находилась вся масса системы и к ней были бы приложены все внешние силы.

## §9. Закон сохранения импульса

$\vec{p} = \sum_i m_i \vec{v}_i$ – импульс системы

$\dot{\vec{p}} = \sum_i m_i \vec{a}_i = m\vec{a}_c = \sum_i \vec{F}_i = \vec{F}_{внеш}$

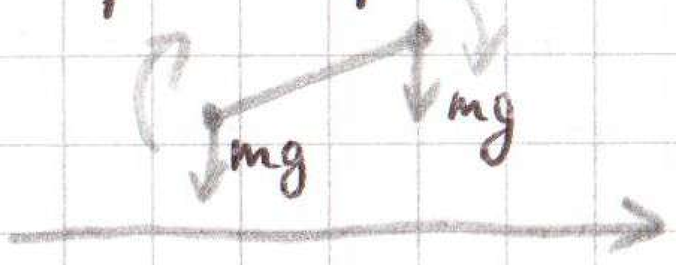
Скорость изменения импульса механической системы равна сумме внешних сил. Если сумма внешних сил равна 0, то импульс механической системы сохраняется.

Закон сохранения импульса.

Если существует такая ось, в проекции на которую сумма внешних сил равна 0, то в направлении этой оси импульс сохраняется.

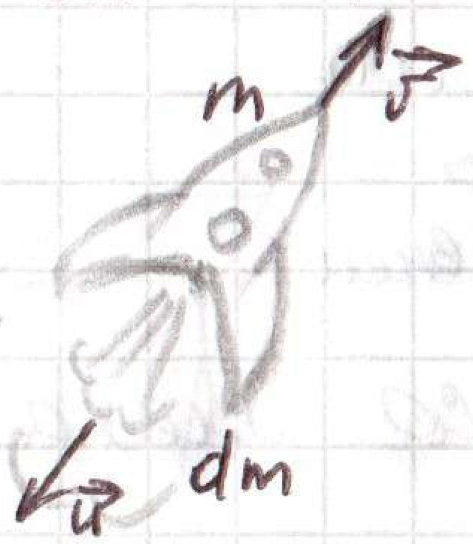
Если $F^{(x)}_{внеш} = 0$, то $p_x = \sum_i m_i v_{ix} = const$

Пример.




$mv_{1x} + mv_{2x} = const$

Реактивное движение обусловлено выбросом реактивной струи.




$$m\vec{v} = (m-dm)(\vec{v}+d\vec{v}) + \vec{u}\,dm$$

$\vec{u} = \vec{v} + \vec{c}$, где $\vec{c}$ — скорость выброса реактивной струи

$$m\vec{v} = m\vec{v} + m\,d\vec{v} - \vec{v}\,dm - \underbrace{dm\,d\vec{v}}_{\to 0} + \vec{v}\,dm + \vec{c}\,dm$$

$$m\,d\vec{v} = -\vec{c}\,dm \;|:dt$$

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -c\frac{dm}{dt} = \vec{F}_p$$

$\vec{F}_p = -\vec{c}\mu$, $\mu = \dot{m} = \frac{dm}{dt}$ — скорость расхода масс

Пример: ракета „Энергия"

$\mu = 10^4 \frac{кг}{с}$, $c = 3\cdot 10^3 \frac{м}{с}$

$F_p = 3\cdot 10^7 = 3000$ тонн (!)

Стартовая масса ракеты

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -\mu\vec{c}$$

$$m = m(t) = m_0 - \mu t$$

Ox: $(m_0 - \mu t)\frac{dv}{dt} = \mu c$

$$\int_0^t \frac{\mu\,dt}{\underbrace{m_0 - \mu t}_{m}} = \int_0^v \frac{dv}{c} = \frac{v}{c}$$

$$\frac{v}{c} = -\int_{m_0}^{m} \frac{dm}{m} = -\ln\frac{m}{m_0} = \ln\frac{m_0}{m}$$

$$\frac{m_0}{m} = e^{v/c}$$

Пример: ракета „Энергия"

$m = 100$ тонн, $v = 8\frac{км}{с}$, $c = 3\frac{км}{с}$

$m_0 = m e^{v/c} \cong 2000$ тонн (!)

Закон сохранения импульса в теории относительности.

Если сумма внешних сил равна 0, то релятивистский импульс системы сохраняется.

Если $\vec{F}_{внеш} = \vec{0}$, то $\vec{p} = \sum_i \vec{p}_i$, $\vec{p}_i = \frac{m\vec{v}_i}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$

$$\dot{\vec{p}} = \sum_i \dot{\vec{p}}_i = \sum_i \left(\vec{F}_i + \sum_j \vec{f}_{ij}\right) = \vec{F}_{внеш}$$

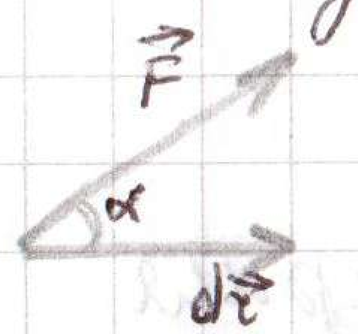
## §10. Работа и потенциальная энергия

Элементарная работа – это скалярное произведение силы на бесконечно малое перемещение в точке приложения силы

$dA = \vec{F} d\vec{r}$

Работа: $A = \int dA$ [Н·м] = [Дж]

1 Джоуль – это работа, которую совершает сила в 1 Н при перемещении точки приложения силы на 1 м в направлении действия силы.




$dA = F dr \cos\alpha$

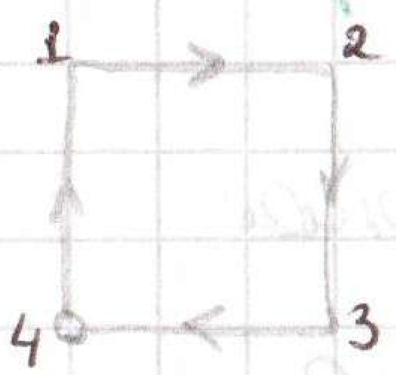
$\vec{F} = \vec{i} F_x + \vec{j} F_y + k F_z$

$d\vec{r} = \vec{i} dx + \vec{j} dy + \vec{k} dz$

$dA = \vec{F} d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$

Если работа силы, действующей на мат. точку, равна 0 при перемещении точки по $\forall$ замкнутому контуру, то сила наз-ся потенциальной.

Сила тяжести.




$$A = \oint dA = A_{42} + \underset{\overset{\parallel}{0}}{A_{12}} + A_{23} + \underset{\overset{\parallel}{0}}{A_{43}} = 0$$

Кроме силы тяжести, потенциальными являются сила упругости и сила Кулона.

Пример непотенциальной силы: сила трения. $A_{тр} < 0$

Элементарная потенциальная энергия – элементарная работа потенциальной силы, взятая со знаком "–".

$d\Pi = -dA_п$

$\Pi = \int d\Pi$ – потенциальная энергия

Выражение силы через потенциальную энергию: $\Pi = \Pi(x, y, z)$ – дана $\vec{F}$ – ?

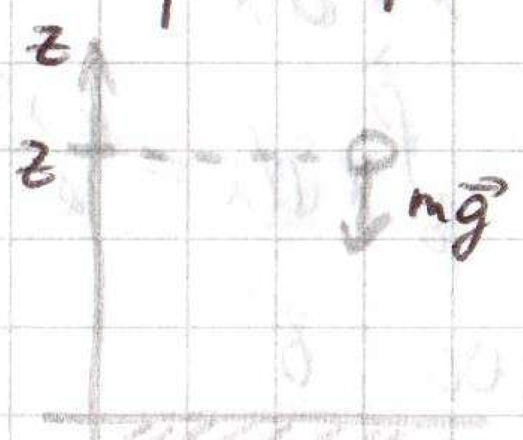
$$d\Pi = -dA = -(F_x dx + F_y dy + F_z dz) = \frac{\partial \Pi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Pi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Pi}{\partial z} dz.$$

Приравняем ~~координат~~ коэффициента при одинаковых дифференциалах: $F_x = -\frac{\partial \Pi}{\partial x}$, $F_y = -\frac{\partial \Pi}{\partial y}$, $F_z = -\frac{\partial \Pi}{\partial z}$.

Вектор силы равен минус градиенту П:

$$\vec{F} = -\overrightarrow{grad}\,\Pi \quad где \quad \overrightarrow{grad}\,\Pi = \vec{i}\frac{\partial \Pi}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial \Pi}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial \Pi}{\partial z}$$

Пример: частица в поле силы тяжести



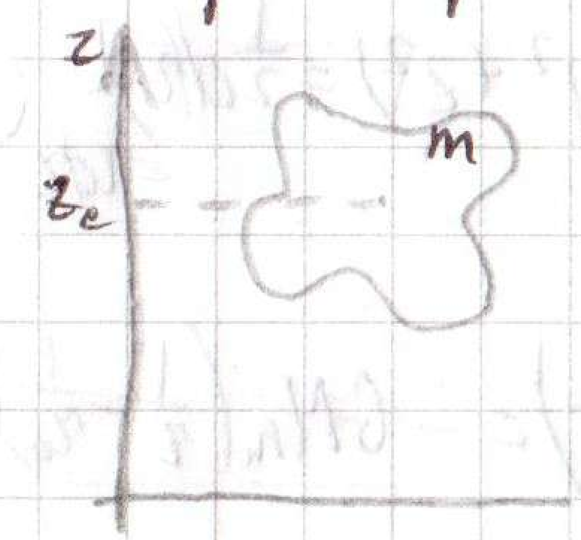

$$A_п^{d\Pi} = -dA = -\vec{F}d\vec{r} = -m\vec{g}\,d\vec{r} = mg\,dz$$

$$\Pi = \int d\Pi = mg\int_0^z dz = mgz.$$

Потенциальная энергия системы частиц – это сумма потенциальных энергий отдельных частиц системы.

$\Pi = \sum_i \Pi_i$

Пример: тело в поле силы тяжести

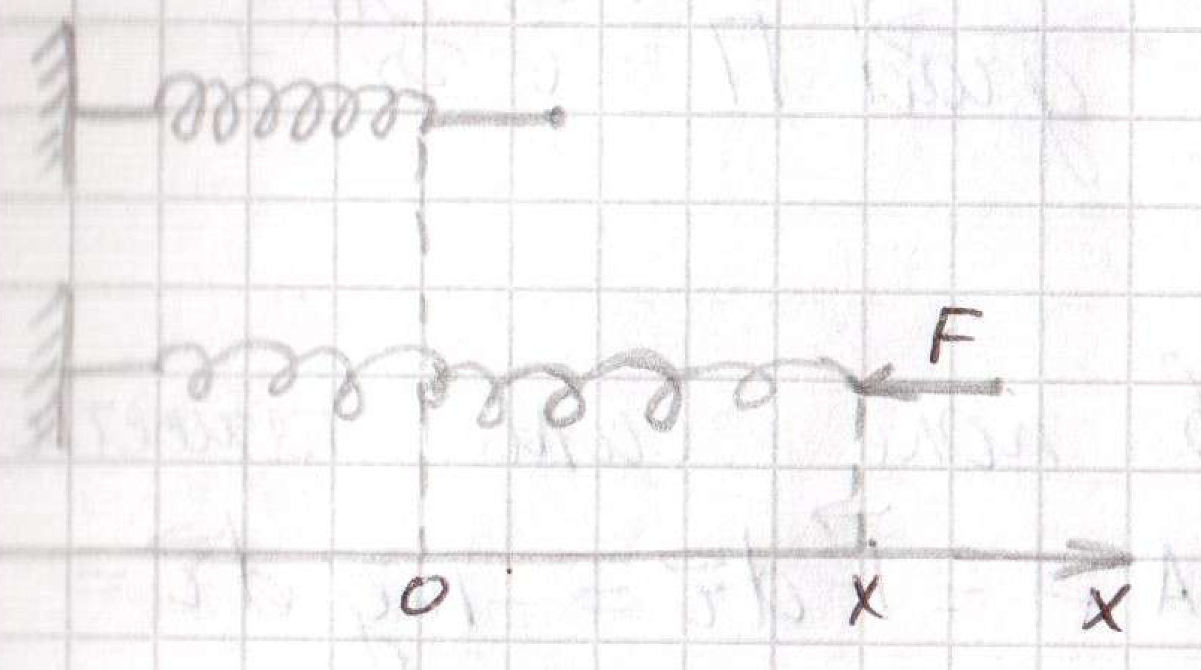



$$\Pi = \sum_i \Pi_i\,(= m_i g z_i) = g\sum_i m_i z_i = gm z_c$$

верт. коорд. центра масс

Потенциальная энергия тела в поле силы тяжести такова, как если бы вся масса тела находилась в его центре масс.

Пример: потенциальная энергия пружины.



$$F_x = -kx$$

$$d\Pi = -dA = -\vec F d\vec r = -F_x dx = kx\,dx$$

$$\Pi = \int d\Pi = k\int_0^x x\,dx = \frac{kx^2}{2}$$

Потенциальная энергия ~~ту~~ частицы в центральном силовом поле.

Центральное поле — поле силы, направленной всегда в сторону одной и той же точки, называемой силовым центром

$$\vec F = G\frac{Mm}{r^2}\left(-\frac{\vec r}{r}\right)$$

$$d\Pi = -dA = -\vec F d\vec r = G\frac{Mm}{r^2}\frac{\vec r}{r}\,d\vec r \ominus$$

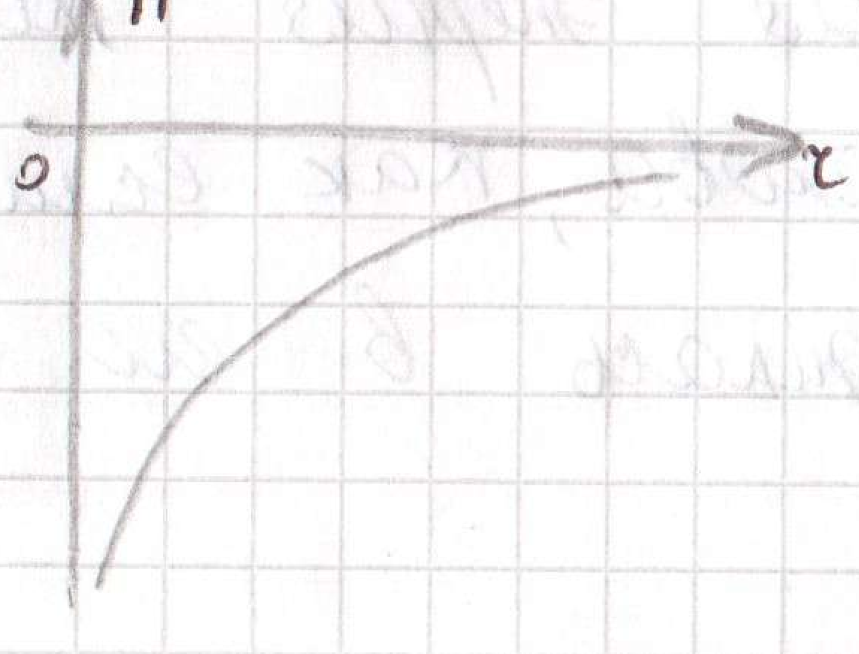
$$\vec r\, d\vec r = x\,dx + y\,dy + z\,dz = \frac12 d(x^2+y^2+z^2) = \frac12 d(r^2) = r\,dr$$

$$\ominus\ G\frac{Mm}{r^2}\,dr$$

$$\Pi = \int d\Pi = GMm\int\frac{dr}{r^2} = -GMm\int_{r_0}^{r} d\left(\frac1r\right) = -GMm\left(\frac1r - \frac1{r_0}\right)$$

Положим $r_0 = \infty$ ($\Pi(r=r_0)=0$):

$$\Pi = -G\frac{Mm}{r}$$



## §10. Кинетическая энергия

Кинетической энергией мат. точки наз-ся величина $K = \frac{m\cdot v^2}{2}$, где $m$ — масса мат. точки, $v$ — модуль её скорости

Закон изменения кинетической энерги

$$m\frac{d\vec v}{dt} = \vec F \quad (*)$$

Умножим (*) скалярно на $d\vec r$:

$$m\underbrace{\frac{d\vec r}{dt}}_{\vec v} d\vec v = \vec F d\vec r = dA = m\vec v\,d\vec v = m v\,dv = d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = dK$$

$$dA = dK$$

Приращение кинетической энергии точки равно работе действующих на неё си

Кинетическая энергия системы част

Кинетическая энергия системы частиц сумме кинетических энергий отдельных частиц системы.

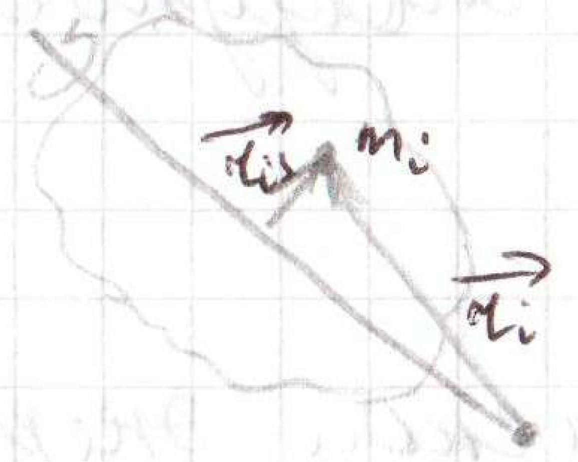
$$K = \sum_i K_i = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2}$$

Пример: поступательное движение

$\vec{v_i} = \vec{v}$

$K = \frac{mv^2}{2}$

Вращение точки вокруг неподвижной оси.



$v_i = \omega r_{i\perp}$

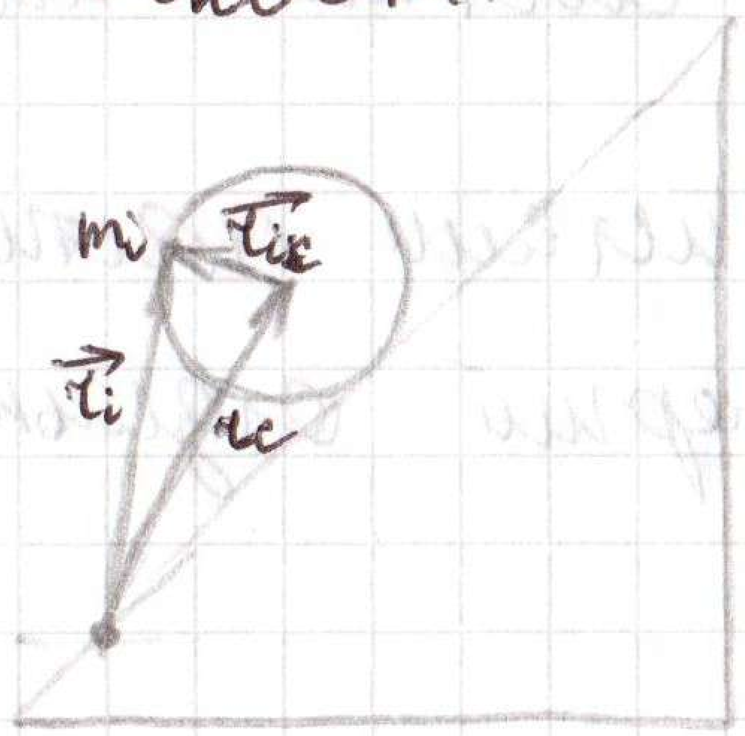
$K = \frac{1}{2}\omega^2 \sum_i m_i r_{i\perp}^2$

Момент инерции тела отн. данной оси — это величина, определяемая формулой

$J = \sum_i m_i r_{i\perp}$

Кинетическая энергия тела, совершающего плоское движ.

Плоское движение — движение, при котором все точки тела движутся параллельно некоторой неподвижной плоскости.



$\vec{r_i} = \vec{r_c} + \vec{r_{ic}}$

$\vec{v_i} = \vec{v_c} + \vec{v_{ic}}$

$\vec{r_c} = \frac{1}{m} \sum_i m_i \vec{r_i}, \vec{v_c} = \frac{1}{m}\sum_i m_i \vec{v_i}$

$K = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i \vec{v_i}\vec{v_i} =$

$= \frac{1}{2} \sum_i m_i (\vec{v_c} + \vec{v_{ic}})(\vec{v_c} + \vec{v_{ic}}) =$

$= \frac{1}{2} m v_c^2 + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_i m_i v_{ic}^2}_{\frac{1}{2} J\omega^2} + \vec{v_c} \underbrace{\sum_i m_i \vec{v_{ic}}}_{=0}$

$K = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2} \quad (J = J_c)$

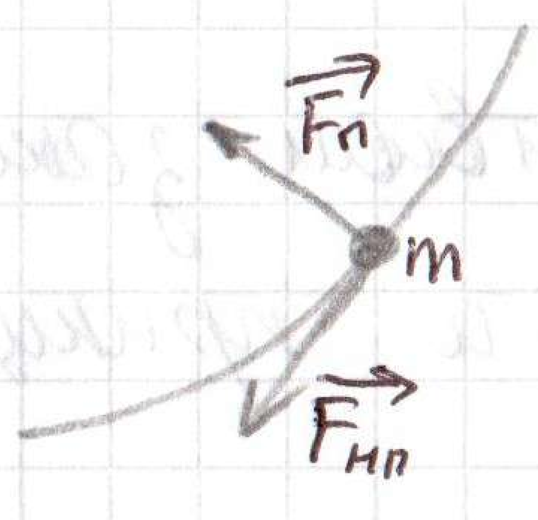
Теорема Кёнига

$\sum_i m_i \vec{v_{ic}} = \sum_i m_i (\vec{v_i} - \vec{v_c}) = m\vec{v_c} - m\vec{v_c} = 0$

## §12. Закон сохранения энергии в механик

Полная механическая энергия – сумм
кинетической и потенциальной
энергии системы. $E = K + П$

Закон изменения полной энергии.




$$\vec{F} = \vec{F}_п + \vec{F}_{нп}$$

$$dK = dA = \vec{F}\, d\vec{r} = (\vec{F_п} + \vec{F_{нп}})\, d\vec{r} =$$

$$= dA_п + dA_{нп} = -dП + dA_{нп}$$

$$dK = -dП + dA_{нп}$$

$$d(K + П) = dE = dA_{нп}$$

Приращение полной энергии систем
равно работе непотенциальных сил.
Закон сохранения полной энерги
в механике: Если работа непоте
циальных сил равна нулю, то
полная механическая энергия систе
мы сохраняется.
Закон сохранения энергии в теории
относительности: Если сумма внешних

сил равна нулю, то полная релятивистская энергия системы сохраняется

$$E = \sum_i \frac{m_i c^2}{\sqrt{1-v_i^2/c^2}} = const$$

Уточнение понятия массы: массу нужно измерять при $v \ll c$, а лучше — при $v_0 = 0$.

Этот закон является следствием закона сохранения импульса и принципа относительности.

Пример: абсолютно неупругий удар


$$\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{MV}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$$

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{Mc^2}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$$

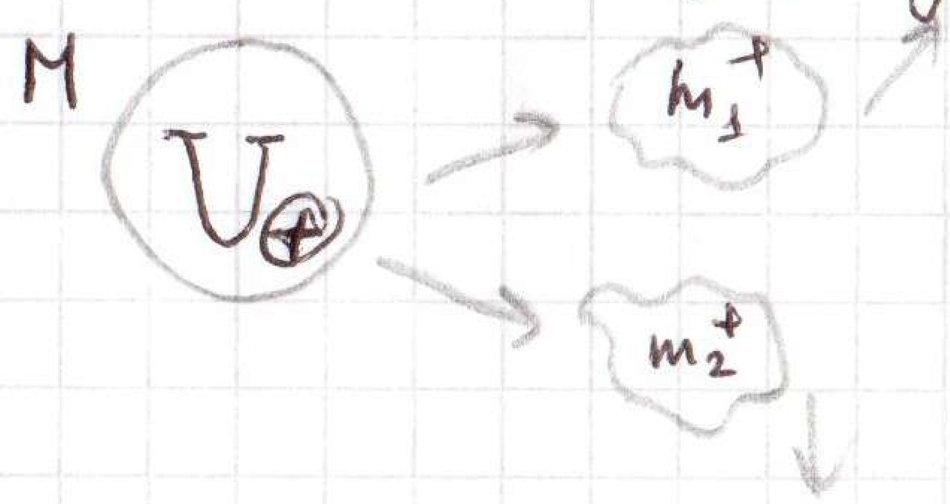
$\rightarrow V = 0$

$$\frac{2mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = Mc^2 \Rightarrow M = \frac{2m}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$M > 2m$ (!)

Факты, подтверждающие теорию относительности

① Деление ядер урана




$E = c^2 \cdot \Delta m$

$\Delta m = M - m_1 - m_2$ — дефект массы

② Световое давление

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \quad E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$\begin{cases} \vec{p}\,c^2 = E\vec{v} \\ E^2 - p^2c^2 = m^2c^4 \end{cases}$$

Положим $m = 0 \rightarrow E = pc$

$v = c$ — фотон


$$F = \dot{p} = \frac{1}{c}\dot{E} = \frac{P}{c}$$

$P$ — мощность света

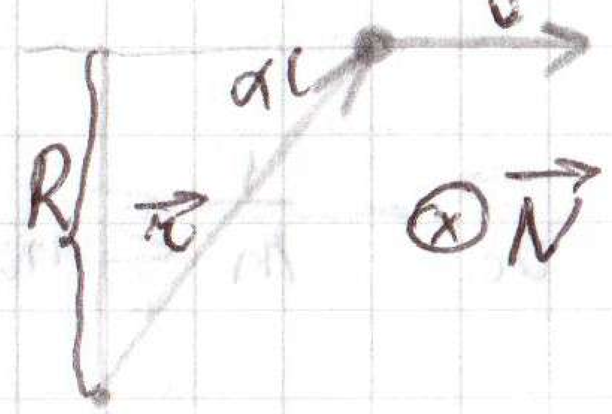
Пример. $P = 10^3$ Вт

$$F = \frac{P}{c} = \frac{10^3 \text{ Вт}}{3 \cdot 10^8 \text{ м/с}} = 3 \cdot 10^{-6} \text{ Н (!)}$$

Опыты Лебедева (1900 г.)

## §13. Момент импульса частиц и системы частиц. Момент силы.

Момент импульса мат. точки - это векторное произведение радиус-вектора точки на её импульс.




$N = rm\upsilon \sin\alpha = Rm\upsilon$

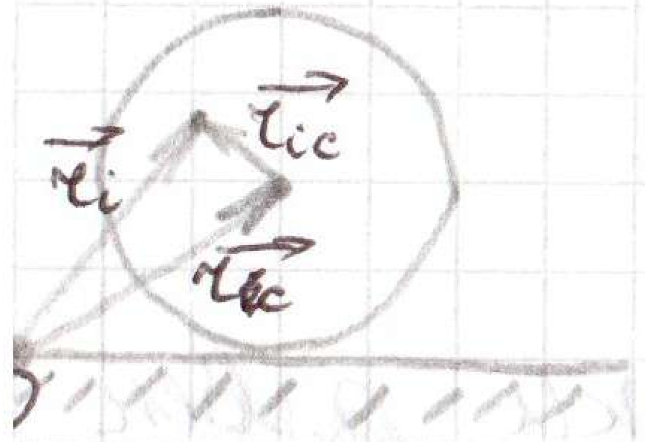
Момент импульса мат. точки равен произведению её импульса на расстояние от начала отсчёта до линии движения точки.

Момент силы - векторное произведение радиус-вектора точки приложения силы на вектор силы.

Момент импульса системы частиц - сумма моментов импульса отдельных частиц системы.

$$\vec N = \sum_i \vec N_i = \sum_i [\vec r_i; m_i \vec v_i]$$

Момент импульса движущегося твёрдого тела.



$$\vec r_c = \frac{1}{m}\sum_i m_i \vec r_i; \quad \vec v_c = \frac{1}{m}\sum_i m_i \vec v_i$$

$$\vec r_i = \vec r_c + \vec r_{ic}$$

$$\vec v_i = \vec v_c + \vec v_{ic}$$

$$N = \sum_i m_i [r_i; \vec v_i] = \sum_i m_i [\vec r_c + \vec r_{ic}; \vec v_c + \vec v_{ic}]$$

$$= [\vec r_c; m\vec v_c] + \sum_i [\vec r_{ic}; m \vec v_{ic}] + [\vec r_c; \underbrace{\sum_i m_i \vec v_{ic}}_{=0}] +$$

$$+ [\underbrace{\sum_i m_i \vec r_{ic}}_{=0}; \vec v_c]$$

$$\sum_i m_i \vec v_{ic} = \sum_i m_i (\vec v_i - \vec v_c) = m\vec v_c - m\vec v_c = \vec 0$$

$$\sum_i m_i \vec r_{ic} = \sum_i m_i (\vec r_i - \vec r_c) = m\vec r_c - m\vec r_c = \vec 0$$

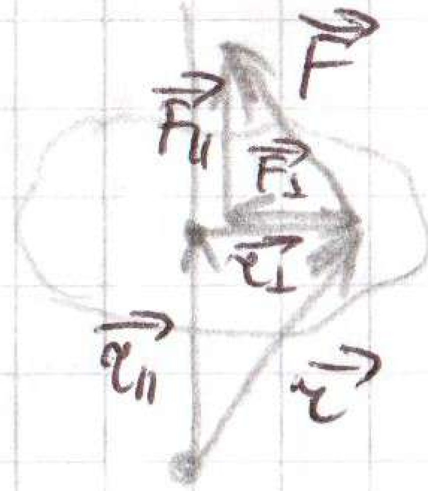
$$\vec N = \vec N_c + \vec N_{0c}$$

$\vec N_c = [\vec r_c; m\vec v_c]$ - момент центра

$\vec N_{0c} = \sum_i [\vec r_{ic}; m_i \vec v_{ic}]$ - момент импульса отн. центра

Моменты относительно оси

Момент отн. оси - проекция вектора момента на эту ось.



$$\begin{cases} \vec F = \vec F_\parallel + \vec F_\perp \\ \vec r = \vec r_\parallel + \vec r_\perp \end{cases}$$

$$M = [\vec r, \vec F] = [\vec r_\parallel + \vec r_\perp; \vec F_\parallel + \vec F_\perp]$$

$$= \underbrace{[\vec r_\parallel; \vec F_\parallel]}_{=0} + \underbrace{[\vec r_\perp; \vec F_\parallel] + [\vec r_\parallel; \vec F_\perp]}_{=\vec M_\perp} + \underbrace{[\vec r_\perp; \vec F_\parallel]}_{=\vec M_\parallel}$$

$$\vec M = \vec M_\parallel + \vec M_\perp$$

Момент импульса отн. оси: $\vec N_\parallel = \sum_i [\vec r_{i\perp}; m_i \vec v_i]$

Пример: вращение тела вокруг неподвижной оси

§3: $\vec v_i = [\vec \omega; \vec r_i]$.

$$\vec v_i = \vec v_{i\perp}$$

$$[\omega; \vec r_i] = [\omega; \vec r_{i\perp}]$$

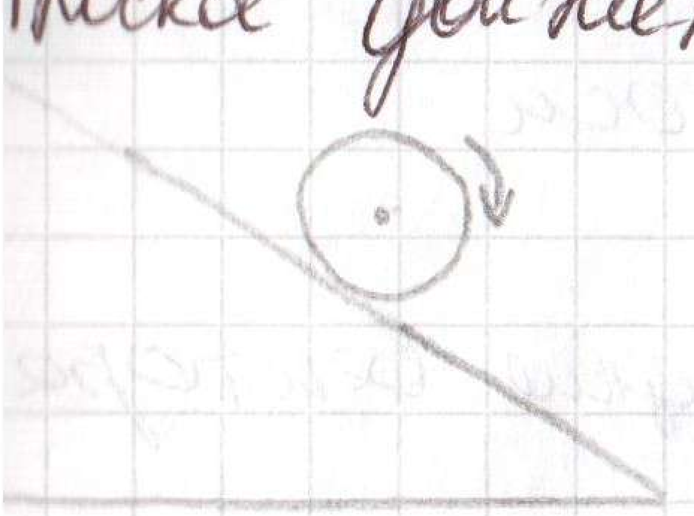
$$\vec v_{i\perp} = [\vec\omega; \vec r_{i\perp}]$$

$$\vec N_\parallel = \sum_i [\vec r_{i\perp}; m_i \vec v_{i\perp}] = \sum_i m_i [\vec r_{i\perp}; [\vec\omega; \vec r_{i\perp}]] =$$

$$= \sum_i m_i (\vec\omega r_{i\perp}^2 - \vec r_{i\perp} \underbrace{(\vec r_{i\perp}, \vec\omega)}_{=0}) = \vec\omega \underbrace{\sum_i m_i r_{i\perp}^2}_{I \text{ - момент инерции отн. данной оси}}$$

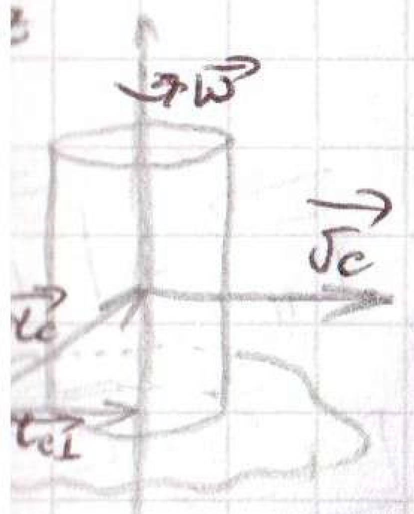
$$\vec N_\parallel = I\vec\omega$$

## Плоское движение твёрдого тела.



$$\vec N = \vec N_c + \vec N_{oc}$$
$$\vec N_{\parallel} = \vec N_{c\parallel} + \vec N_{oc\parallel}$$
$$\vec N_{c\parallel} = [\vec r_{c\perp}; m\vec v_{c\perp}]$$
$$\vec N_{oc\parallel} = J\vec\omega \quad (J = J_c)$$

$$\vec N_{\parallel} = [\vec r_{c\perp}; m\vec v_{c\perp}] + J\vec\omega$$



## §14. Закон сохранения момента импульса

$$\vec N = [\vec r; m\vec v]$$
$$\dot{\vec N} = \underbrace{[\dot{\vec r}; m\vec v]}_{=0} + [\vec r; m\dot{\vec v}] = [\vec r; \vec F] = \vec M$$

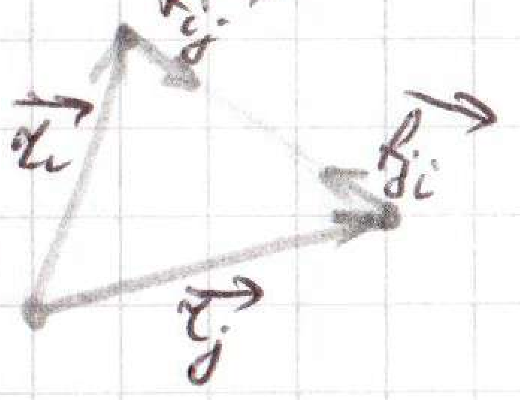
Скорость изменения момента импульса частицы равна моменту действующей на нее силы.

Система частиц

$$\vec N = \sum_i [\vec r_i; m_i\vec v_i]$$
$$\dot{\vec N} = \sum_i \underbrace{[\dot{\vec r}_i; m_i\vec v_i]}_{=0} + \sum_i [\vec r_i; m_i\dot{\vec v}_i]$$

$$\dot{\vec N} = \sum_i [\vec r_i; \vec F_i + \sum_j \vec f_{ij}] = \sum_i [\vec r_i; \vec F_i] + \sum_i [\vec r_i; \sum_j \vec f_{ij}]$$

Покажем, что полный момент внутр. сил равен $\vec 0$.



Найдём суммарной момент внутр. сил для этой пары частиц.

$$M_{ij} = [\vec r_i; \vec f_{ij}] + [\vec r_j; \vec f_{ji}] = [\vec r_i - \vec r_j; \vec f_{ij}] = \vec 0.$$

$$\overrightarrow{M_{внутр}} = \sum_i \sum_j \overrightarrow{M_{ij}} = \vec{0}.$$

$$\dot{\vec{N}} = \overrightarrow{M_{внеш}}$$

Скорость изменения момента импульса системы равен сумме моментов внешних сил - закон изменение момента импульса системы.

Закон сохранения момента импульса: Если сумма моментов внешних сил равна 0, то момент импульса системы сохраняется.

Более сильная формулировка: Если существует такая ось, относительно которой сумма моментов внешних сил равна 0, то относительно этой оси момент импульса системы сохраняется.

## § 15. Материальная точка в центральном поле.

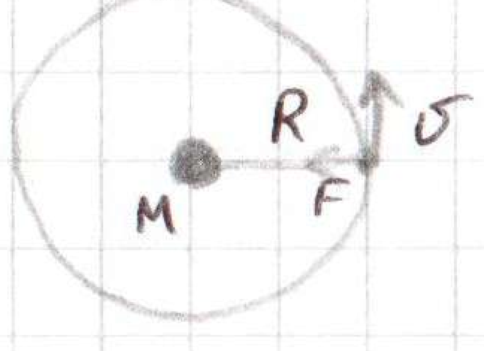
Законы Кеплера

① Планеты Солнечной системы движутся по эллипсам, в общем фокусе которых находится Солнце.

② За равные промежутки времени радиус-вектор планеты очерчивает равные площади.

③ Квадраты периодов обращений планет относятся как кубы больших полуосей их эллиптических орбит.

Пример.




$$F = G\frac{Mm}{R^2}$$

$$ma = F$$

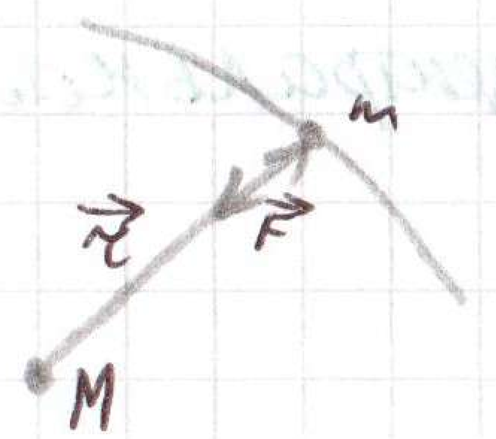
$$a = \frac{\upsilon^2}{R}$$

$$\frac{m\upsilon^2}{R} = G\frac{Mm}{R^2}, \quad T = \frac{2\pi R}{\upsilon}$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2 R^2}{\upsilon^2}$$

$$\frac{\upsilon^2}{R^2} = G\frac{M}{R^3}$$

$$T^2 = 4\pi^2\frac{R^3}{GM} = const \cdot R^3$$

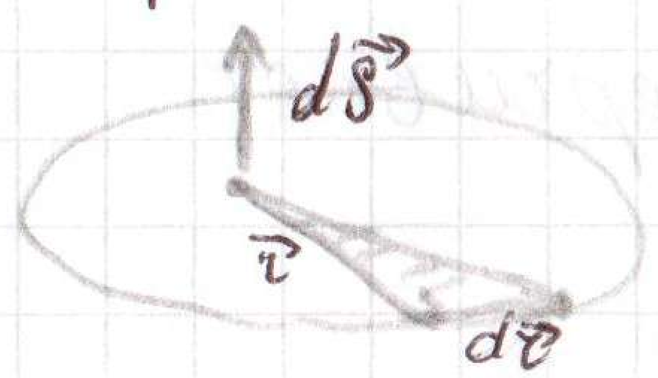


$\vec{M} = [\vec{r}; \vec{F}] = 0 \to \vec{N} = [\vec{r}; m\vec{v}] = const$

① Движение в центр. поле является плоским

② При движении в центр. поле сохраняется секторная скорость

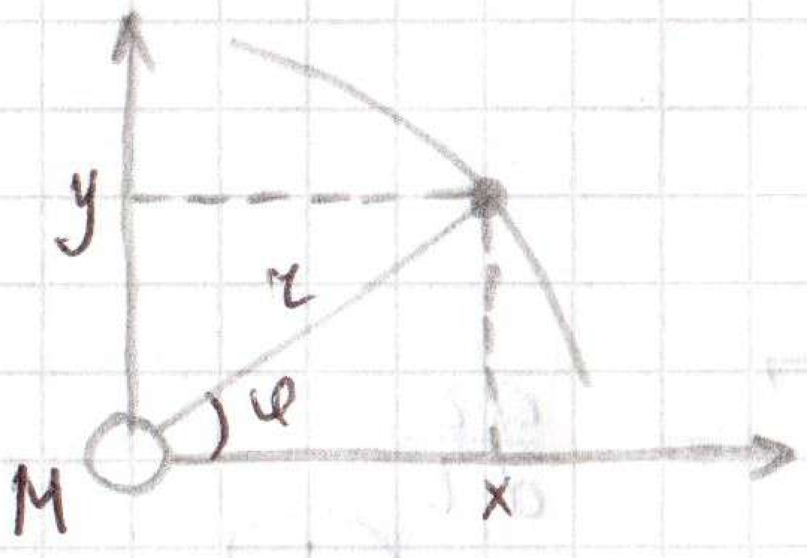
Секторная площадь: $d\vec{S} = \frac{1}{2}[\vec{r}; d\vec{r}]$



Секторная скорость: $\vec{\sigma} = \frac{d\vec{S}}{dt} = \frac{1}{2}[\vec{r}; \frac{d\vec{r}}{dt}] =$

$= \frac{1}{2}[\vec{r}; \vec{v}] = \frac{1}{2m}\vec{N} = const$

Траектория движения частицы в центральном поле.



$y(x)$ - ?

$r, \varphi$ - полярные координаты точки

$r(\varphi)$ - ?

Будем использовать законы сохр энергии и момента импульса

З.с.э. $K + П = E = const$

З.с.м.и $\vec{N} = [\vec{r}; m\vec{v}] = const$

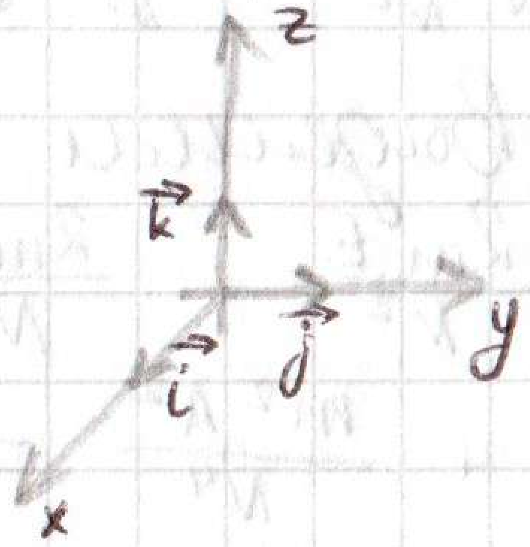
$K = \frac{mv^2}{2}$, $П = -G\frac{Mm}{r}$ (§10)

$A = GMm \to П = -\frac{A}{r}$

$\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y$, $\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \vec{i}\dot{x} + \vec{j}\dot{y}$

$\vec{N} = m[\vec{i}x + \vec{j}y; \vec{i}\dot{x} + \vec{j}\dot{y}] =$

$= m\vec{k}(x\dot{y} + \dot{x}y) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & 0 \\ \dot{x} & \dot{y} & 0 \end{vmatrix}$



$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ $\begin{cases} \dot{x} = \dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi \\ \dot{y} = \dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi \end{cases}$

$\vec{N} = mr^2\dot{\varphi}$

$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2$

$$\begin{cases} \frac{m}{2}(\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2) - \frac{A}{r} = E \\ m r^2 \dot\varphi = N \end{cases}$$

$$\dot\varphi = \frac{N}{mr^2}$$

$$\dot r^2 + \frac{N^2}{m^2r^2} - \frac{2A}{mr} = \frac{2E}{m}$$

$$\begin{cases} \dot r = \pm\sqrt{\frac{2E}{m}+\frac{2A}{mr}-\frac{N^2}{m^2r^2}} = \frac{dr}{dt} \\ \dot\varphi = \frac{N}{mr^2} = \frac{d\varphi}{dt} \end{cases} \quad \div$$

$$\frac{dr}{d\varphi} = \pm\frac{mr^2}{N}\sqrt{\frac{2E}{m}+\frac{2A}{mr}-\frac{N^2}{m^2r^2}}$$

$$\frac{dr}{d\varphi} = \pm r^2\sqrt{\frac{2mE}{N^2}+\frac{2mA}{N^2r}-\frac{1}{r^2}}$$

Введем переменную $\rho = \frac{1}{r}$

$$d\rho = -\frac{1}{r^2}dr$$

$$\frac{dr}{r^2\sqrt{\frac{2mE}{N^2}+\frac{2mA}{N^2r}-\frac{1}{r^2}}} = \pm d\varphi$$

$$\frac{d\rho}{\sqrt{\frac{2mE}{N^2}+\frac{2mA}{N^2}\rho-\rho^2}} = \pm d\varphi$$

Выделим полный квадрат под радикалом:

$$\frac{2mE}{N^2}+\frac{2mA}{N^2}\rho-\rho^2 = \frac{2mE}{N^2}-\Big(\rho^2-\frac{2mA}{N^2}\rho+\frac{m^2A^2}{N^4}-\frac{m^2A^2}{N^4}\Big) = \underbrace{\frac{2mE}{N^2}+\frac{m^2A^2}{N^4}}_{a^2}+\Big(\underbrace{\rho-\frac{mA}{N^2}}_{x}\Big)^2$$

$$d\rho = dx$$

$$\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \pm d\varphi$$

$$\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = d\Big(\arcsin\frac{x}{a}\Big)$$

$$\arcsin\frac{x}{a} = const \pm \varphi$$

Пусть $const = \frac{\pi}{2}$, знак "–"

$$\arcsin\frac{x}{a} = \frac{\pi}{2}-\varphi$$

$$\frac{x}{a} = \sin\Big(\frac{\pi}{2}-\varphi\Big) = \cos\varphi$$

$$x = a\cos\varphi$$

Вспомним, что $x = \rho - \frac{mA}{N^2}$,

$$a = \sqrt{\frac{2mE}{N^2}+\frac{m^2A^2}{N^4}}$$

$$x = \frac{1}{r}-\frac{mA}{N^2} = a\cos\varphi$$

$$\frac{1}{r} = \frac{mA}{N^2}+a\cos\varphi$$

$$r = \frac{1}{\frac{mA}{N^2}+a\cos\varphi} = \frac{\frac{N^2}{mA}}{1+\frac{N^2}{mA}a\cos\varphi}$$

Пусть $p = \frac{N^2}{mA}$, $\varepsilon = \frac{N^2}{mA}\sqrt{\frac{2mE}{N^2}+\frac{m^2A^2}{N^4}} = \sqrt{1+\frac{2N^2E}{mA^2}}$, тогда $r(\varphi) = \frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}$

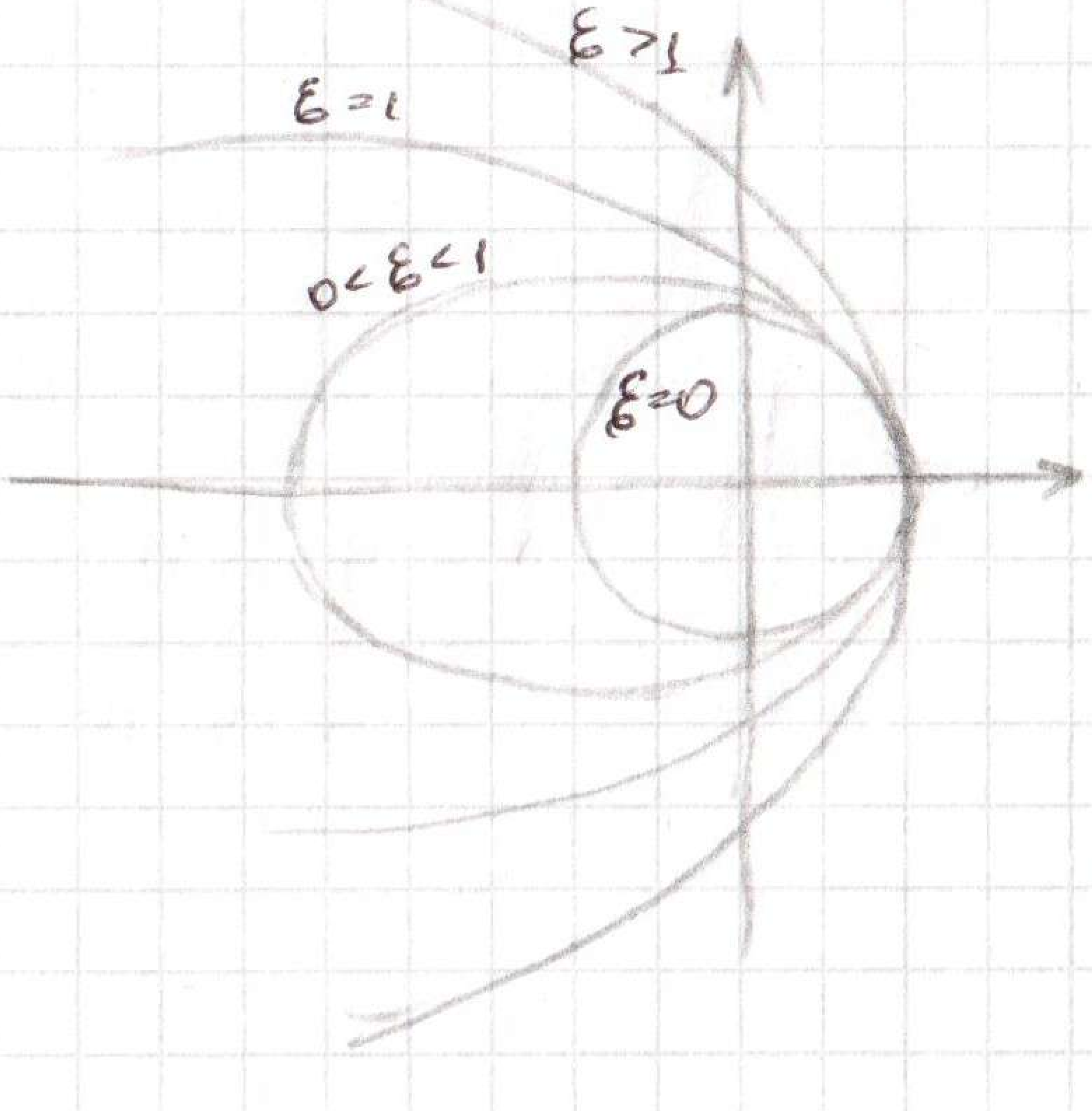
Типы траекторий:

$\varepsilon = 0$ – окружность

$0 < \varepsilon < 1$ – эллипс

$\varepsilon = 1$ – парабола

$\varepsilon > 1$ – гипербола



## §16. Плоское движение твёрдого тела. Ур-ие вращения тела вокруг неподвижной оси

Теорема моментов: $\dot{\vec{N}} = \vec{M}$

$\vec{N}_{\parallel} = J\vec{\omega}$

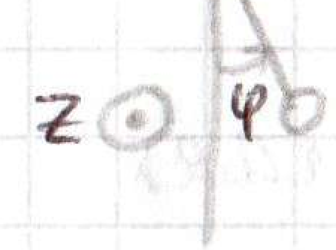
$\dot{\vec{N}}_{\parallel} = \vec{M}_{\parallel}$

$J\dot{\vec{\omega}} = \vec{M}_{\parallel}$

Угловое ускорение: $\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}}$ $[\frac{1}{c^2}]$

$J\vec{\varepsilon} = \vec{M}_{\parallel}$

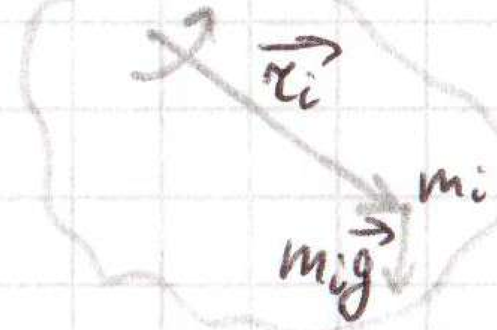
Спроектируем на ось вращения $z$:




$J\varepsilon_z = M_z$

$\varepsilon_z = \ddot{\varphi}$

Пример: физический маятник – тело произвольной формы, имеющее неподвижную горизонтальную ось вращения.



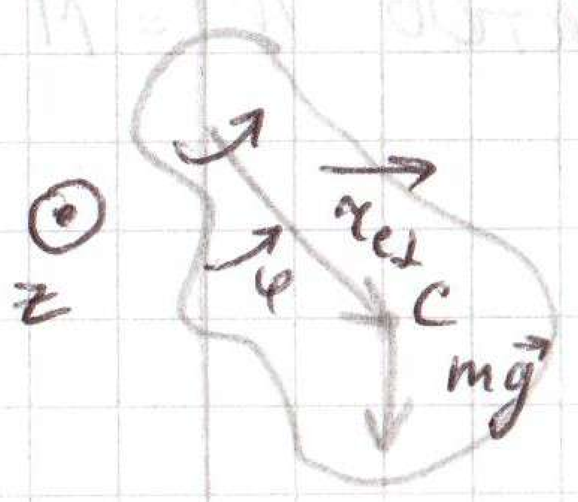

$\vec{M} = \sum_i [\vec{r_i}; m_i\vec{g}] = \sum_i [m_i\vec{r_i}; \vec{g}]$

$= [\sum_i m_i\vec{r_i}; \vec{g}]$

$\vec{r_c} = \frac{1}{m}\sum_i m_i\vec{r_i}$

$\vec{M} = [m\vec{r_c}; \vec{g}] = [\vec{r_c}; m\vec{g}]$.

Суммарный момент сил тяжести таков, ~~что~~ как если бы вся масса тела находилась в его центре масс.




$$\vec{M}_{\parallel} = [\vec{r}_{c1}, m\vec{g}]$$

$$M_z = -|\vec{M}_{\parallel}| = -\underbrace{r_{c1}}_{l} mg\sin\varphi$$

$$J\varepsilon_z = M_z$$

$$M_z = -mgl\sin\varphi$$

$$\varepsilon_z = \ddot{\varphi}$$

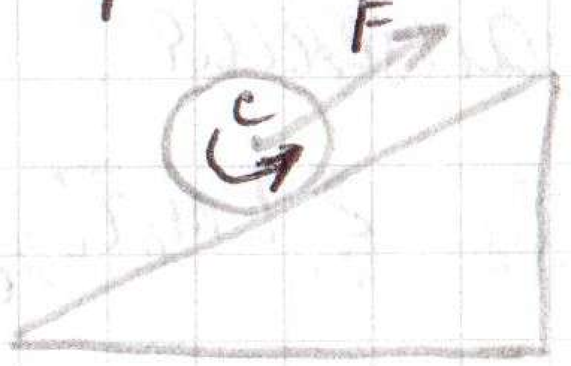
$$J\ddot{\varphi} = -mgl\sin\varphi$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{mgl}{J}\sin\varphi = 0$$

Ур-ие вращения справедливо в 2 случаях:

1) $\forall$ неподвижной оси.

2) для движущейся оси, проходящей через центр масс тела.




$$J\varepsilon_z = M_z$$

Сводка формул:

1) Ур-ие движения центра масс

$$m\vec{a}_c = \vec{F}_{внеш}$$

2) Ур-е вращения

$$J\varepsilon_z = M_z$$

3) Импульс

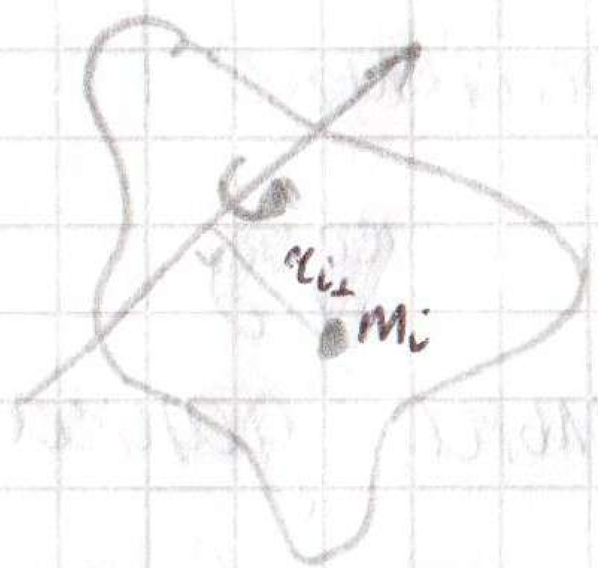
$$\vec{p} = m\vec{v}_c$$

4) Кинетическая энергия ($J = J_c$)

$$K = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}$$

5) $\vec{N}_{\parallel} = [\vec{r}_{c1}; m\vec{v}_c] + J\vec{\omega}$ ($J = J_c$)

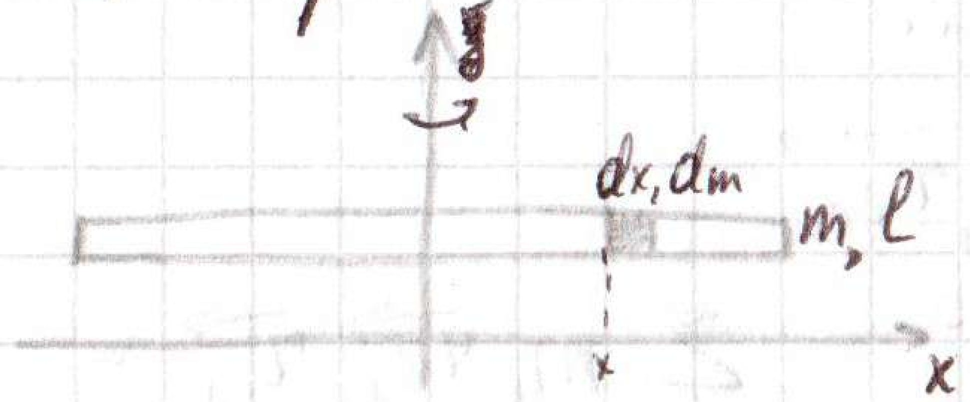
# §17. Момент инерции твёрдого тела.




$$J = \sum_i m_i r_{i\perp}^2 \quad [кг \cdot м^2]$$

Пример:

1) стержень



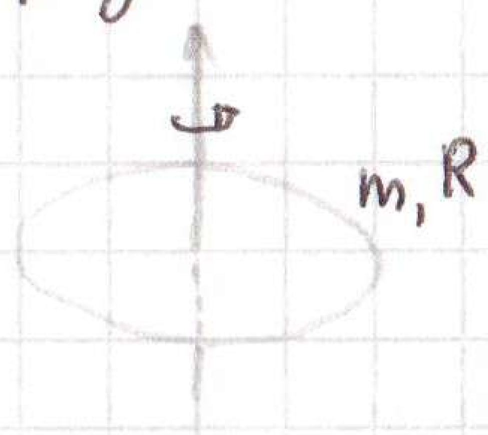

$J$ – ?

$$dJ = x^2 dm = \frac{m}{l} x^2 dx$$

$dm = \frac{m}{l} dx$ – однородность стержня

$$J = \int dJ = \frac{m}{l} \int_{-l/2}^{l/2} x^2 dx = \frac{ml^2}{12}$$

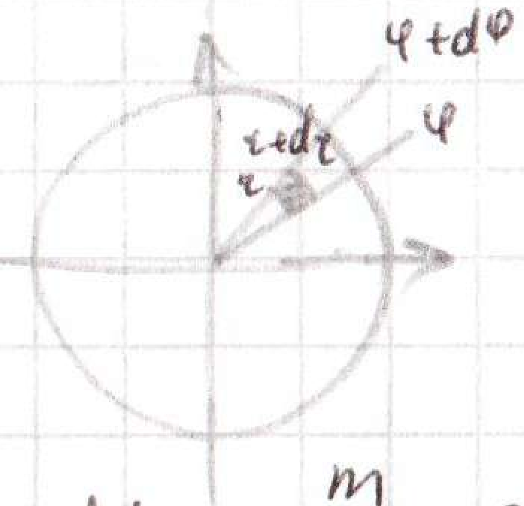
2) диск




$J$ – ?

$r, \varphi$

$r + dr, \ \varphi + d\varphi$



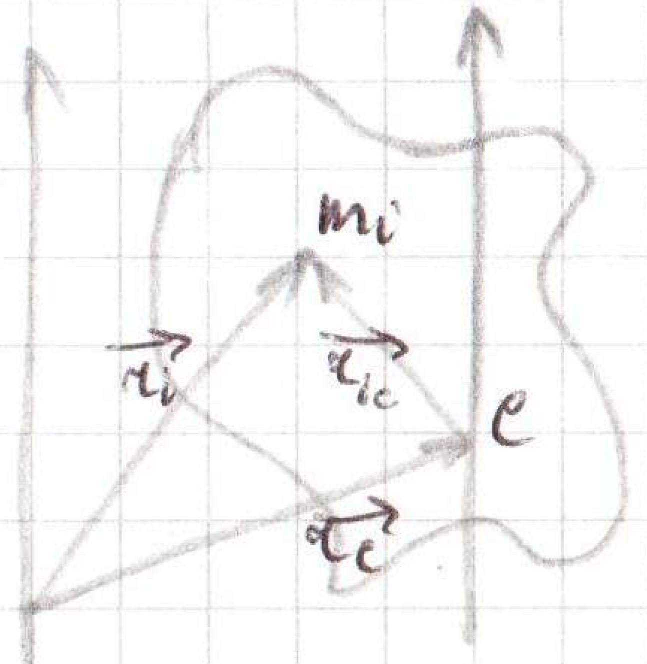

$$dS = r\,dr\,d\varphi$$

$$dJ = r^2 dm, \quad dm = \frac{m}{S} dS$$

$$dJ = \frac{m}{S} r^3 dr\, d\varphi \Rightarrow J = \int dJ = \frac{m}{S} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r^3 dr = \frac{mR^2}{2}$$

Теорема Гюйгенса - Штейнера

Момент инерции тела относительно произвольной оси, проходящей через центр масс тела параллельно данной + масса тела, умноженная на квадрат расстояния между осями. $J = J_c + ma^2$




$$\vec{r_i} = \vec{r_c} + \vec{r_{ic}}$$

$$\vec{r_{i\perp}} = \vec{r_{c\perp}} + \vec{r_{ic\perp}}$$

$$J = \sum_i m_i r_{i\perp}^2 = \sum_i m_i \vec{r_{i\perp}}\,\vec{r_{i\perp}} =$$

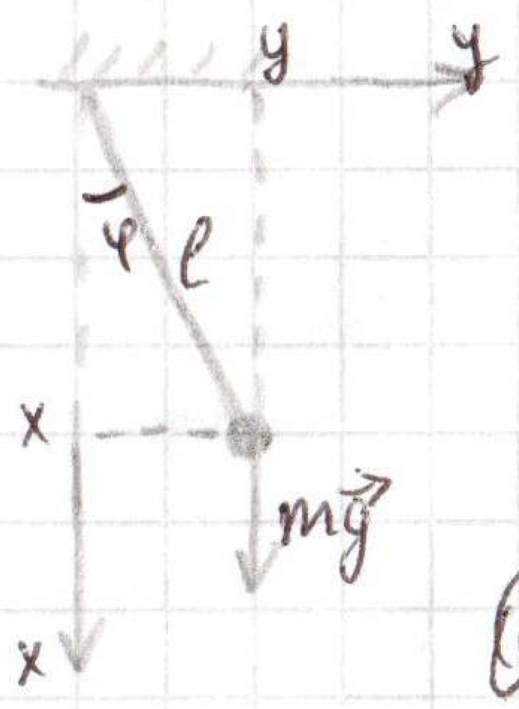
$$= \sum_i m_i (\vec{r_{c\perp}} + \vec{r_{ic\perp}})(\vec{r_{c\perp}} + \vec{r_{ic\perp}}) = m r_{c\perp}^2 +$$

$$+ \sum_i m_i r_{ic\perp}^2 + 2\vec{r_{c\perp}} \underbrace{\sum_i m_i \vec{r_{ic\perp}}}_{=0}$$

$$\sum_i m_i \vec{r_{ic\perp}} = \sum_i m_i (\vec{r_i} - \vec{r_c}) = m\vec{r_c} - m\vec{r_c} = 0$$

$$J = J_c + ma^2.$$

Пример: плоский математический маятник




$$S = 1,\ q = \varphi$$

$$\begin{cases} x = l\cos\varphi \\ y = l\sin\varphi \end{cases}$$

$$Q_j = \sum_{l=1}^{N} \vec{F_l}\,\frac{\partial \vec{r_l}}{\partial q_j},\ j = \overline{1, s}$$

$$Q = m\vec{g}\,\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = mg\,\frac{\partial x}{\partial \varphi} = -mgl\sin\varphi$$

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = -l\sin\varphi$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot\varphi}\right) - \frac{\partial K}{\partial \varphi} = Q$$

$$K = \frac{m v^2}{2} = \frac{m}{2}(\dot x^2 + \dot y^2)$$

$$K = \frac{m}{2} l^2 \dot\varphi^2 \to \frac{\partial K}{\partial \varphi} = 0$$

$$\frac{\partial K}{\partial \dot\varphi} = ml^2\dot\varphi \to ml^2\ddot\varphi = -mgl\sin\varphi$$

$$\ddot\varphi + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0$$

## §21. Функция Лагранжа. Обобщённые импульсы.

Рассмотрим систему с идеальными голономными связями и потенциально заданными силами.

$\vec{F}_e = -\operatorname{grad} \Pi_e(\vec{r}) = -(\vec{i}\frac{\partial \Pi_e}{\partial x_e} + \vec{j}\frac{\partial \Pi_e}{\partial y_e} + \vec{k}\frac{\partial \Pi_e}{\partial z_e}$

$Q_j = \sum_{e=1}^{N} \vec{F}_e \frac{\partial \vec{r}_e}{\partial q_j}$

$\vec{F}_e \frac{\partial \vec{r}_e}{\partial q_j} = -\left(\frac{\partial \Pi_e}{\partial x_e}\cdot\frac{\partial x_e}{\partial q_j} + \frac{\partial \Pi_e}{\partial y_e}\frac{\partial y_e}{\partial q_j} + \right.$
$\left. + \frac{\partial \Pi_e}{\partial z_e}\frac{\partial z_e}{\partial q_j}\right) = -\frac{\partial \Pi_e}{\partial q_j}$, где $\Pi_e = \Pi_e(q)$

$Q_j = \sum_{e=1}^{N}\left(-\frac{\partial \Pi_e}{\partial q_j}\right) = -\frac{\partial}{\partial q_j}\underbrace{\sum_{e=1}^{N}\Pi_e}_{\Pi}$

$Q_j = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}, \quad j=\overline{1,S}$

$\Pi = \sum_{e=1}^{N}\Pi_e = \Pi(q)$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial K}{\partial q_j} = Q_j = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial}{\partial q_j}(K-\Pi) = 0$

Т.к. $\frac{\partial \Pi}{\partial \dot{q}_j} = 0$, то

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial (K-\Pi)}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial (K-\Pi)}{\partial q_j} = 0.$

Введём функцию Лагранжа (Лагранжиан) как разность кинетической и потенциальной энергий системы, выраженную через набор обобщённых координат, обобщённых скоростей и время.

$L = K - \Pi = L(q, \dot{q}, t)$

Уравнения Лагранжа принимают вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \; j = \overline{1,s}$$

Обобщённый импульс – это частная производная функции Лагранжа по обобщённой скорости.

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}, \; j = \overline{1,s}$$

Размерность: $[p] = \frac{Дж \cdot с}{[q]}$

1) $[q] = м$ $\quad [p] = Н \cdot с = [mv]$

2) $[q] = 1$ $\quad [p] = [mvr]$

Закон изменения обобщённого импульса:

$$\dot{p}_j = \frac{\partial L}{\partial q_j}$$

Циклическая координата – это координата, которая не входит явным образом в функцию Лагранжа $\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$.

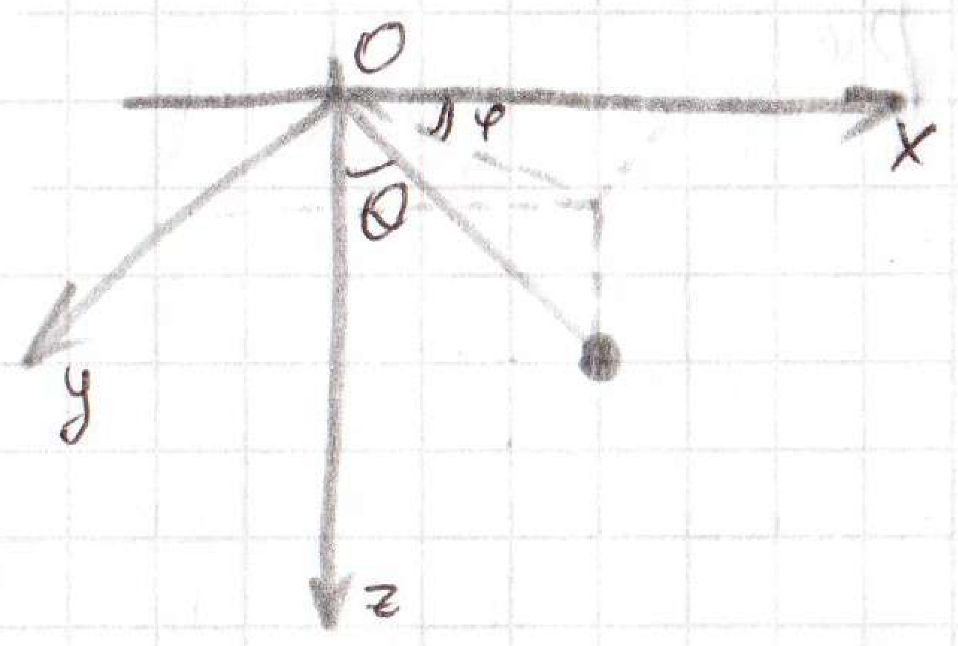
~~Закон со~~

Закон сохранения обобщённого импульса

Обобщённый импульс, соответствующий циклической координате, сохраняется:

если $\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$, то $p_j = const$

Пример: сферический маятник




$s = 2$

$q_1 = \theta, q_2 = \varphi$

$\dot{q}_1 = \dot{\theta}, \dot{q}_2 = \dot{\varphi}$

$L = K - \Pi = L(\theta, \dot{\theta}, \varphi, \dot{\varphi})$

$K = \frac{m}{2} v^2 = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$

$\Pi = -mgz = -mgl\cos\theta$

$$\begin{cases} x = l\sin\theta\cos\varphi \\ y = l\sin\theta\sin\varphi \\ z = l\cos\theta \end{cases}$$

$\dot{x} = l(\dot{\theta}\cos\theta\cos\varphi - \dot{\varphi}\sin\theta\sin\varphi)$

$\dot{y} = l(\dot{\theta}\cos\theta\sin\varphi + \dot{\varphi}\sin\theta\cos\varphi)$

$\dot{z} = -l\dot{\theta}\sin\theta$

$v^2 = l^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta)$

$L = \frac{m}{2} l^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta) + mgl\cos\theta$

$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow p_\varphi = const$

$p_\varphi = \frac{dL}{d\dot\varphi} = \frac{\partial K}{\partial \dot\varphi} = ml^2 \dot\varphi \sin^2\theta = const$

$p_\varphi = N_z$ (?)

$\vec N = [\vec r; m\vec v] = m \begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ x & y & z \\ \dot x & \dot y & \dot z \end{vmatrix}$

$N_z = m(x\dot y - \dot x y) = ml^2 \dot\varphi \sin^2\theta = p_\varphi$

$\dot N_z = 0, \; N_z = const$

## §2. Уравнения Гамильтона.

Рассмотрим систему с идеальными голономными связями и потенциальными заданными силами. Будем характеризовать состояние системы набором обобщенных координат и обобщённых импульсов.

$\{q, p\}$ – канонические переменные

Введем ур-ие движения в этих переменных

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad j = \overline{1,s}$$

$$L = K - \Pi = L(q, \dot q, t)$$

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot q_j}$$

$$\dot p_j = \frac{\partial L}{\partial q_j}$$

Запишем уравнение для дифференциала функции Лагранжа:

$$dL = \sum_{j=1}^{s}\left(\frac{\partial L}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial L}{\partial \dot q_j} d\dot q_j\right) + \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

$$dL = \sum_{j=1}^{s}(\dot p_j\, dq_j + p_j\, d\dot q_j) + \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

Введём функцию $H$:

$$H = \sum_{j=1}^{s} p_j \dot q_j - L$$

Вычислим её дифференциал:

$$dH = \sum_{j=1}^{s} (p_j \, d\dot{q}_j + \dot{q}_j \, dp_j) - dL$$

$$dH = \sum_{j=1}^{s} (p_j \, d\dot{q}_j + \dot{q}_j \, dp_j - \dot{p}_j \, dq_j - p_j \, d\dot{q}_j) - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

$$dH = \sum_{j=1}^{s} (\dot{q}_j \, dp_j - \dot{p}_j \, dq_j) - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

Выразим функцию $H$ через обобщённые координаты и обобщённые импульсы системы

$H = H(q, p, t)$

$$dH = \sum_{j=1}^{s} \left( \frac{\partial H}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial H}{\partial p_j} dp_j \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых дифференциалах:

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}, \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}, \quad j = \overline{1, s}$$

Первые два соотношения – ур-я Гамильтона

Функция Гамильтона от времени

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{j=1}^{s} \left( \frac{\partial H}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial H}{\partial p_j} \dot{p}_j \right) + \frac{\partial H}{\partial t}$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \sum_{j=1}^{s} \underbrace{(-\dot{q}_j \dot{p}_j + \dot{p}_j \dot{q}_j)}_{=0} + \frac{\partial H}{\partial t}$$

$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}$ – это означает, что у Гамильтониана нет неявной зависимости от времени.

Поэтому если Гамильтониан явно не зависит от времени, то он будет постоянной величиной.

Если $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$, то $H = H(q, p) = const$.

Консервативная система – это система, Гамильтониан которой не зависит от времени (Это система со стационарными связями, либо вообще без связей).

Вычислим Гамильтониан консервативной системы

$$\vec{r}_e = \vec{r}_e (q_1, \dots, q_s)$$

$$H = \sum_{j=1}^{s} p_j \dot{q}_j - L$$

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial (K - \Pi)}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j}$$

$$K = \sum_{e=1}^{N} \frac{m_e v_e^2}{2} = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^{N} m_e \vec{v}_e \vec{v}_e \ominus$$

$$\vec{v}_e = \dot{\vec{r}}_e = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_e}{\partial q_j} \dot{q}_j$$

$$\ominus \frac{1}{2} \sum_{e=1}^{N} m_e \sum_{\alpha=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_e}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha \sum_{\beta=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_e}{\partial q_\beta} \dot{q}_\beta = \left\{ \begin{array}{l} \text{меняем порядок} \\ \text{суммирования} \end{array} \right.$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{s} \sum_{\beta=1}^{s} \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta \underbrace{\sum_{e=1}^{N} m_e \frac{\partial \vec{r}_e}{\partial q_\alpha} \frac{\partial \vec{r}_e}{\partial q_\beta}}_{K_{\alpha\beta} = K_{\alpha\beta}(q) = K_{\beta\alpha}} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{s} \sum_{\beta=1}^{s} K_{\alpha\beta} \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta$$

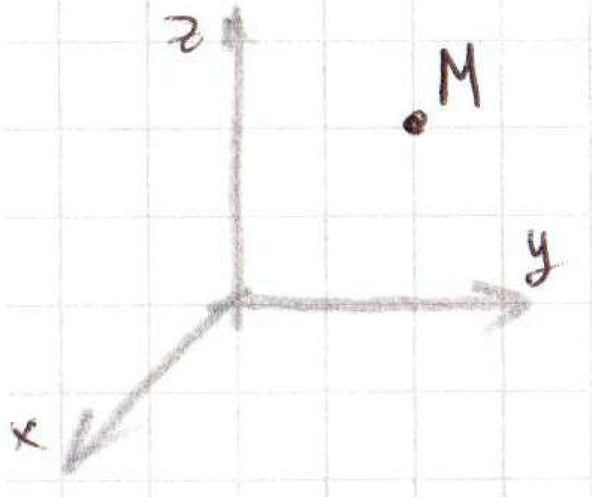
$$p_j = \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{s} \sum_{\beta=1}^{s} K_{\alpha\beta} \left( \dot{q}_\alpha \frac{\partial \dot{q}_\beta}{\partial \dot{q}_j} + \dot{q}_\beta \frac{\partial \dot{q}_\alpha}{\partial \dot{q}_j} \right)$$

Символ Кронекера: $\delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1, & \alpha = \beta \\ 0, & \alpha \neq \beta \end{cases}$

$$p_j = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{s} \sum_{\beta=1}^{s} K_{\alpha\beta} (\dot q_\alpha \delta_{\beta j} + \dot q_\beta \delta_{\alpha j}) =$$
$$= \frac{1}{2} \Big( \sum_{\alpha=1}^{s} \dot q_\alpha \sum_{\beta=1}^{s} K_{\alpha\beta} \delta_{\beta j} + \sum_{\beta=1}^{s} \dot q_\beta \sum_{\alpha=1}^{s} K_{\alpha\beta} \delta_{\alpha j} \Big) =$$
$$= \frac{1}{2} \Big( \sum_{\alpha=1}^{s} \dot q_\alpha K_{\alpha j} + \sum_{\beta=1}^{s} \dot q_\beta K_{j\beta} \Big) = \frac{1}{2} \Big( \sum_{\alpha=1}^{s} \dot q_\alpha K_{\alpha j} + \sum_{\beta=1}^{s} \dot q_\beta K_{\beta j} \Big)$$
$$p_j = \sum_{\alpha=1}^{s} K_{\alpha j} \dot q_\alpha, \quad j = \overline{1,s}$$
$$H = \sum_{j=1}^{s} p_j \dot q_j - L = \sum_{j=1}^{s} \dot q_j \sum_{\alpha=1}^{s} K_{\alpha j} \dot q_\alpha - L = \underbrace{\sum_{\alpha=1}^{s} \sum_{j=1}^{s} K_{\alpha j} \dot q_\alpha \dot q_j}_{2K} - L$$
$$H = 2K - L = 2K - (K - \Pi) = K + \Pi = E$$

Гамильтониан консервативной системы имеет смысл её полной механической энергии.

Частица в потенциальном силовом поле




$\Pi = \Pi(x, y, z)$ — пот. энергия

$q_1 = x, \ q_2 = y, \ q_3 = z.$

$H = K + \Pi = H(q, p)$

$$K = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}(\dot x^2 + \dot y^2 + \dot z^2)$$
$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot x} = \frac{\partial K}{\partial \dot x} = m\dot x$$
$$p_y = \frac{\partial K}{\partial \dot y} = m\dot y \qquad p_z = \frac{\partial K}{\partial \dot z} = m\dot z$$
$$\Rightarrow \dot x = \frac{p_x}{m}, \ \dot y = \frac{p_y}{m}, \ \dot z = \frac{p_z}{m}$$
$$K = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)$$
$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \Pi(x, y, z)$$

## §23. Равновесие системы и его устойчивость

Равновесие — состояние, в котором система, предоставленная самой себе, может находиться сколь угодно долго.

Условие равновесия.

$$m_\ell \ddot{\vec r_\ell} = \vec F_\ell + \vec R_\ell = 0 \quad (\ell = \overline{1,N}).$$

① $\vec F_\ell + \vec R_\ell = 0$

В равновесии сумма заданных сил и сил реакции должна быть равна 0 для любой точки системы.

Дальше рассмотрим системы с идеальными голономными и стационарными связями.

① $\rightarrow \sum_{\ell=1}^{N} (\vec F_\ell + \vec R_\ell) \delta \vec r_\ell = 0 = \sum_{\ell=1}^{N} \vec F_\ell \delta \vec r_\ell + \underbrace{\sum_{\ell=1}^{N} \vec R_\ell \delta \vec r_\ell}_{=0}$

② $\sum_{\ell=1}^{N} \vec F_\ell \delta \vec r_\ell = 0.$

Перейдём к обобщённым координатам.

$$\vec r_\ell = \vec r_\ell (q_1, \dots, q_s)$$
$$\rightarrow \delta \vec r_\ell = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \vec r_\ell}{\partial q_j} \delta q_j$$
$$\sum_{\ell=1}^{N} \vec F_\ell \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \vec r_\ell}{\partial q_j} \delta q_j = \Big\{ \text{поменяем порядок суммирования} \Big\} =$$

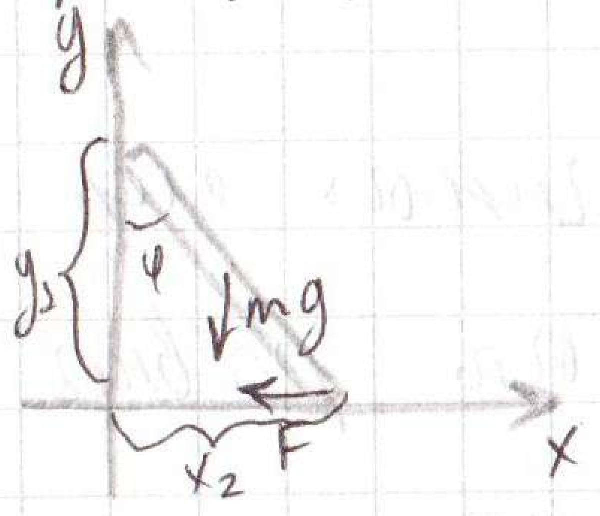
$$= \sum_{j=1}^{s} \delta q_j \underbrace{\sum_{e=1}^{N} \vec{F_e} \frac{\partial \vec{r_e}}{\partial q_j}}_{Q_j} = 0.$$

Из ... следует, что $\sum_{j=1}^{s} Q_j \delta q_j = 0$.

В положении равновесия все обобщённые силы должны быть равны 0:

③ $Q_j = 0 \quad (j = \overline{1,s})$

Пример: равновесие стержня.




$F$ – ?

$Q = 0$

$$Q = m\vec{g}\,\frac{\partial \vec{r_1}}{\partial \varphi} + \vec{F}\,\frac{\partial \vec{r_2}}{\partial \varphi} = -mg\,\frac{\partial y_1}{\partial \varphi} - F\,\frac{\partial x_2}{\partial \varphi}$$

$y_1 = \frac{l}{2}\cos\varphi$, $x_2 = l\sin\varphi$

$\frac{\partial y_1}{\partial \varphi} = -\frac{l}{2}\sin\varphi$, $\frac{\partial x_2}{\partial \varphi} = l\cos\varphi$

$Q = mg\,\frac{l}{2}\overset{\sin}{\cancel{\cos}}\varphi - Fl\cos\varphi = 0$

$F = \frac{1}{2} mg\, tg\,\varphi.$

Устойчивость равновесия.

Равновесие устойчиво, если система, выведенная из этого состояния и предоставленная самой себе, начинает двигаться в сторону положения равновесия.

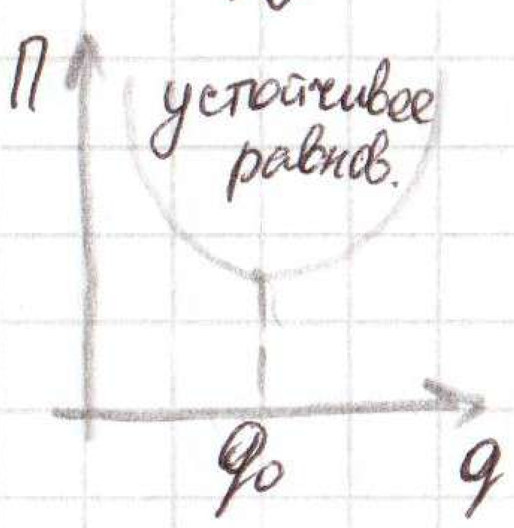
Рассмотрим систему с потенциальными заданными силами.

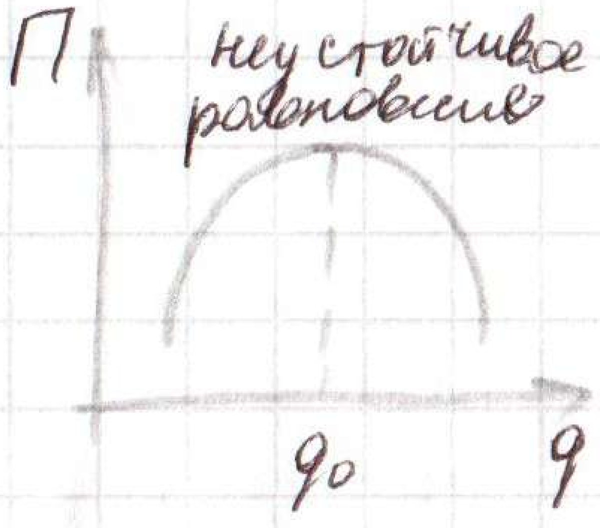
$Q_j = \frac{\partial П}{\partial q_j}$, $j = \overline{1,s}$

П – потенциальная энергия

$Q_j = 0 \to \frac{\partial П}{\partial q_j} = 0$ ④

В положении равновесия потенциальная энергия системы должна иметь экстремум по всем обобщённым координатам.



Пример равновесие стержня.

неустойчив

## §24. Колебания системы с одной степенью свободы.

Колебания – повторяющиеся движения в окрестности положения устойчивого равновесия системы.

Уравнение гармонических колебаний

$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$

$x$ – координата мат. точки, которая отсчитывается от положения равновесия

$\omega$ – частота колебаний ($c^{-1}$)

Общее решение

$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$

$t$ – время ($c$)

$A$ – амплитуда колебаний

$\varphi$ – начальная фаза

$\Phi = \omega t + \varphi$ – фаза колебаний.

$\dot{x} = -A\omega \sin(\omega t + \varphi)$

$\ddot{x} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x$

$A, \varphi$ – произвольные

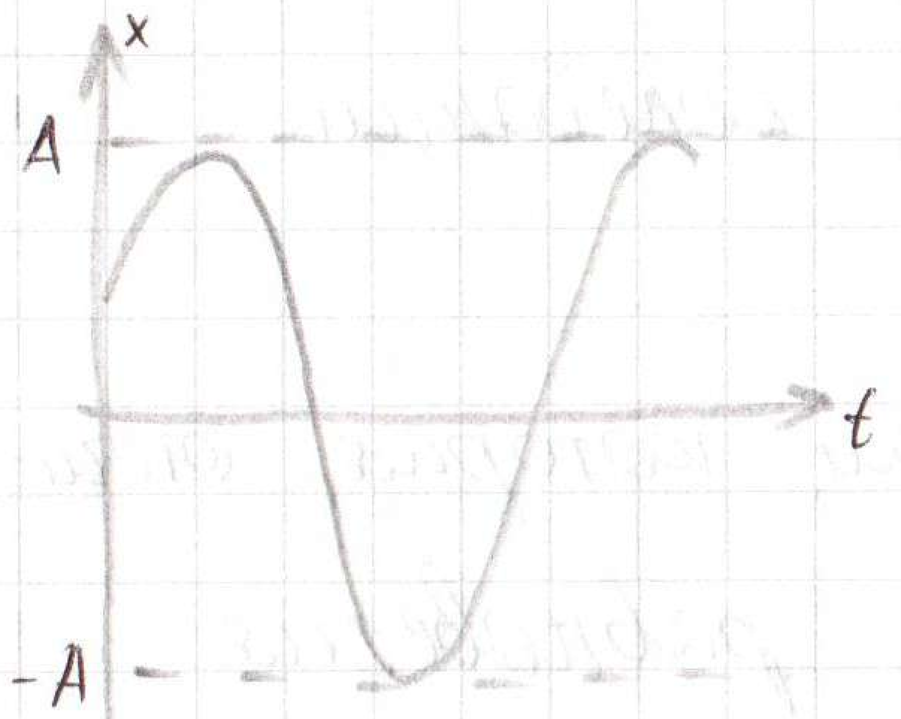
Начальные условия:

$$\begin{cases} x(t=0) = x_0 \\ \dot{x}(t=0) = \dot{x}_0 \end{cases}$$

$$x_0 = A\cos\varphi, \quad \dot{x}_0 = -A\omega\sin\varphi$$

$$x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{\omega^2} = A^2$$

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{\omega^2}}$$

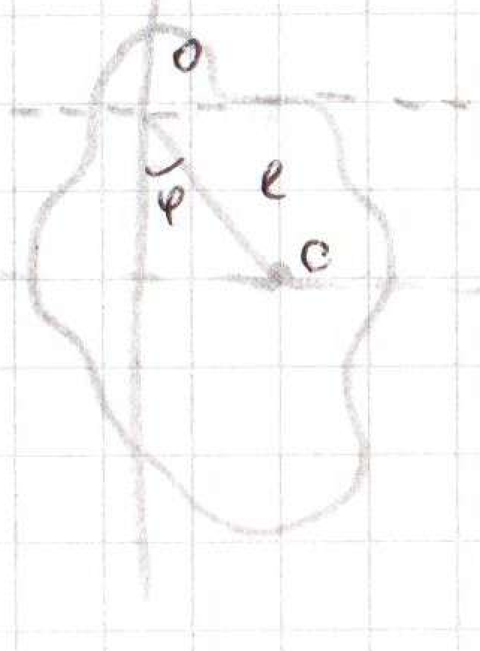



Метод определения частот

① Для начала нужно выписать ур-я движения системы.

② $\ddot{x} + \omega^2 x = 0.$

Пример: физический маятник.




$$S = 1, \quad q = \varphi, \quad \dot{q} = \dot{\varphi} = \omega$$

$$K = \frac{J\omega^2}{2} = \frac{J\dot{\varphi}^2}{2}$$

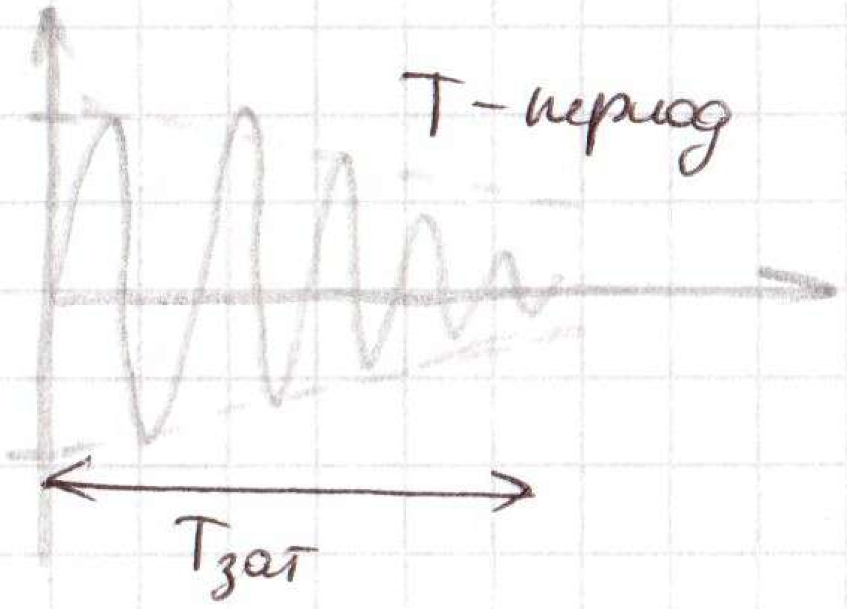
$$\Pi = -mgl\cos\varphi$$

$$L = K - \Pi = \frac{J\dot{\varphi}^2}{2} + mgl\cos\varphi$$

## §25. Физические эффекты в колебательной системе.

① Затухание колебаний

$$\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \omega^2 x = 0$$




Добротность $Q = \frac{T_{зат}}{T}$

② Нелинейные колебания

$\ddot{x} + f(x) = 0$, где $f(x)$ – нелинейная ф-ция.

Пример:

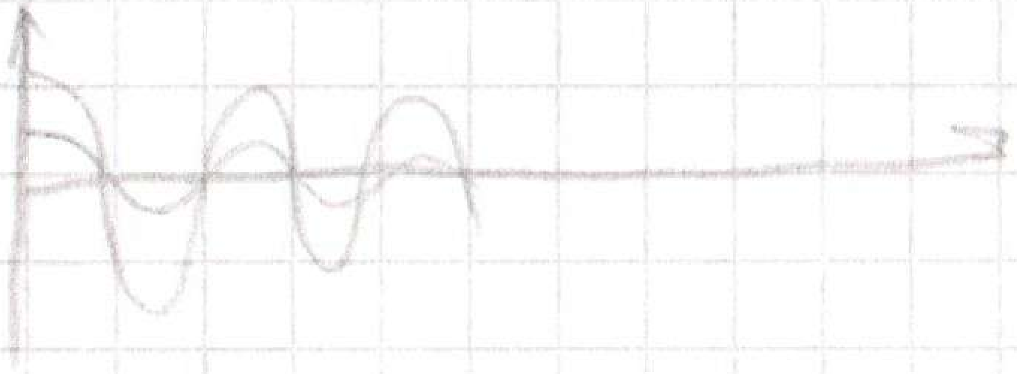

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0$$

$$E = K + \Pi = \cos\alpha$$

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{2E}{ml^2} + \frac{2g}{l}\cos\varphi$$

$$\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2E}{ml^2} + \frac{2g}{l}\cos\varphi} = \frac{d\varphi}{\sqrt{\frac{2E}{ml^2} + \frac{2g}{l}\cos\varphi}} = \pm dt$$

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\frac{2m}{ml^2} + \frac{2g}{l}\cos\varphi}} = \pm\int_0^t dt = \pm t$$ – эллиптический интеграл



Новый физический эффект состоит в том, что период колебаний будет зависеть от амплитуды.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -mgl\sin\varphi \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = J\dot\varphi$$

$$J\ddot\varphi + mgl\sin\varphi = 0$$

Рассмотрим малые колебания: $\varphi << 1$

$$\sin\varphi \simeq \varphi$$

$$J\ddot\varphi + mgl\varphi = 0$$

$$\ddot\varphi + \frac{mgl}{J}\varphi = 0 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{mgl}{J}}$$

$m$ - масса

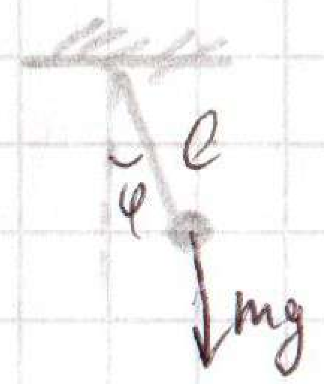
$g$ - ускорение свободного падения

$l$ - расстояние

$J$ - момент инерции

Период колебаний: $T = \frac{2\pi}{\omega}$

Частный случай: математический маятни

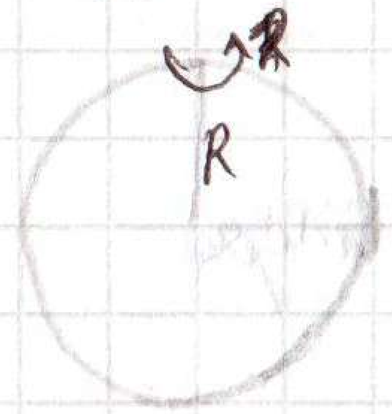



$$J = ml^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{mgl}{ml^2}} = \sqrt{\frac{g}{l}} , \quad \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}$$ — формул

Гюйгенса

Обруч



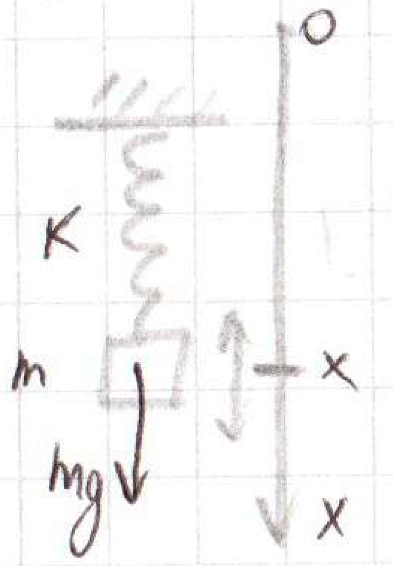

$$\omega = \sqrt{\frac{mgl}{J}}$$

$$l = R$$

$$J = mR^2 + mR^2 = 2mR^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{mgR}{2mR^2}} = \sqrt{\frac{g}{2R}}$$

Пружинный осциллятор




$\omega - ?$

$$m\ddot{x} = mg - k(x - l_0)$$

$$m\ddot{x} + k(x - l_0) - mg = 0$$

$$m\ddot{x} + k(\underbrace{x - l_0 - \frac{mg}{k}}_{y}) = 0$$

$$\ddot{x} = \ddot{y}$$

$$m\ddot{y} + ky = 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

③ Вынужденные колебания - колебания

$$\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t)$$

$$f(t) = f_0 \cos\omega t$$

Ищем частное решение $x(t)$

$$\cos\omega t = \frac{1}{2}e^{i\omega t} + \frac{1}{2}e^{-i\omega t}$$ — формула Эйлера

$$= \frac{1}{2}e^{i\omega t} + к.с.$$

$$f(t) = \frac{1}{2} f_0 e^{i\omega t} + к.с.$$

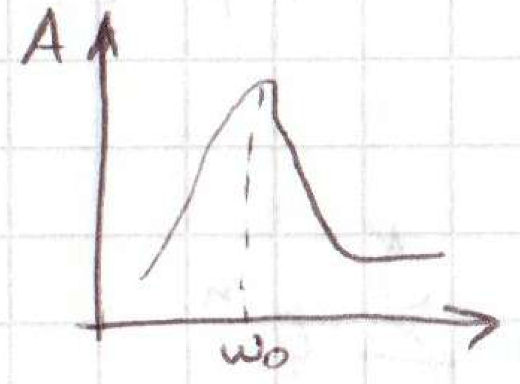
$$x(t) = \frac{1}{2} A e^{i\omega t} + к.с.$$

$$\dot{x} = \frac{1}{2} A i\omega e^{i\omega t} + к.с$$

$$\ddot{x} = \frac{1}{2} A(-\omega^2) e^{i\omega t} + к.с.$$

$$\frac{1}{2} A e^{i\omega t}(\omega_0^2 - \omega^2 + \alpha i\omega) + к.с = \frac{1}{2} f e^{i\omega t} + к.с$$

$$A = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + \alpha i\omega}$$

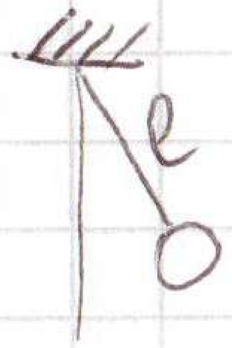



Резонанс

Резонанс - возрастание амплитуды колебаний при совпадении частоты внешней силы с собств частотой колебаний системы.

④ Параметрические колебания - колебания при которых параметры системы меняются с течением времени

Параметрический резонанс - возрастание амплитуды колеб., когда частота изменений парам системы кратна собств. частоте колеб.




$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$\omega(t) = \omega_0^2(1 + \varepsilon\cos 2\omega_0 t)$$

⑤ Ансамбль осцилляторов

Рассмотрим набор маятников, у которых частоты кратны некоторой величине

$$x(t)=\frac{1}{2}A\sum_{n=1}^{N}e^{in\omega_1 t}+к.с.$$

$$q=e^{i\omega_1 t}$$

$$S=\sum_{n=1}^{N}e^{in\omega_1 t}=\sum_{n=1}^{N}q^n$$

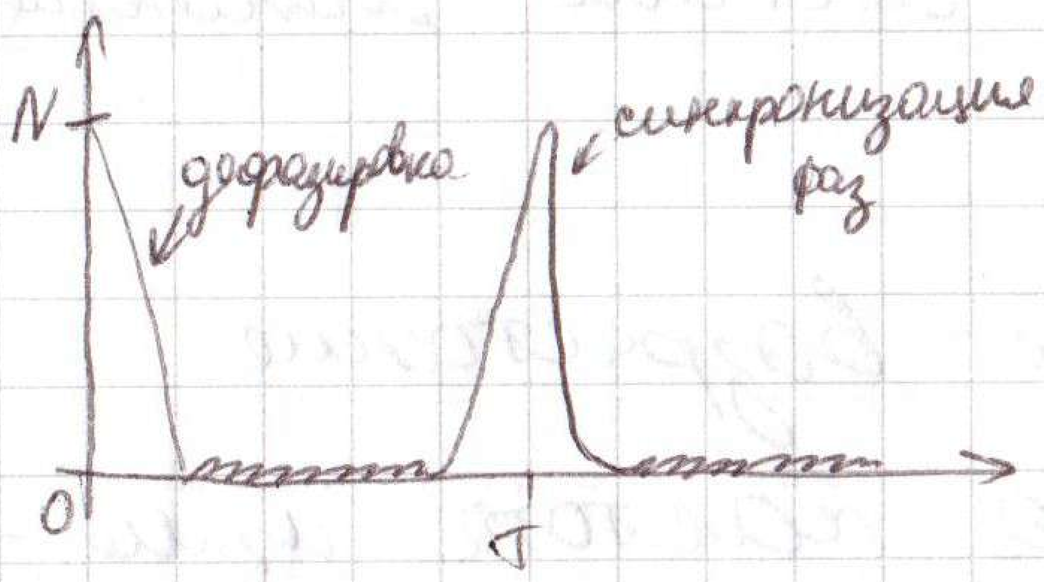
$$S=q+q^2+\ldots+q^N+\ldots$$

$$Sq=q^2+\ldots q^N+q^{N+1}$$

$$S(q-1)=q^{N+1}-q=q(q^N-1)$$

$$S=q\frac{q^N-1}{q-1}=S(t)$$

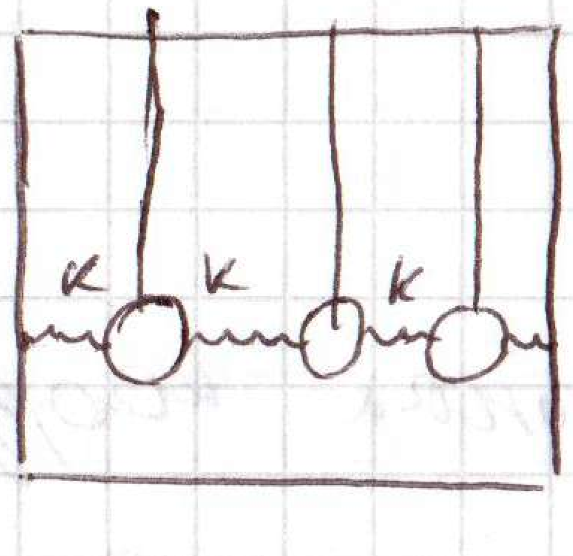
$$S(t)=\left|\frac{\sin N\omega_1 t}{\sin\omega_1 t}\right|$$




$$T=\frac{2\pi}{\omega_1}$$

## §26. Нормальные колебания и нормальные координаты.

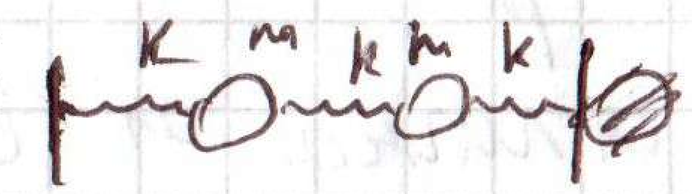
Рассмотрим колебательную систему с несколькими степенями свободы.




$$m\ddot{x}_1=-kx_1+k(x_2-x_1)$$

$$m\ddot{x}_2=-k(x_2-x_1)-kx_2$$

Заметим, что ур-я оказались связанными, но ∃ точки, где они независимы.




$\oplus$ $m(\ddot{x}_1+\ddot{x}_2)=-k(x_1+x_2)$

$\ominus$ $m(\ddot{x}_2-\ddot{x}_1)=-3k(x_2-x_1)$

$$\theta_1=x_1+x_2,\quad \theta_2=x_2-x_1$$

$$\ddot{\theta}_1+\frac{k}{m}\theta_1=0$$

$$\omega_1=\sqrt{\frac{k}{m}},\quad \omega_2=\sqrt{\frac{3k}{m}}$$

Собственные частоты.

$$\begin{cases}\ddot{\theta}_1+\omega_1^2\theta_1=0\\ \ddot{\theta}_2+\omega_2^2\theta_2=0\end{cases}$$

Нормальные координаты — координаты, которые при любых движениях системы

меняются независимо друг от друга.
Каждая норм. координата меняется по гарм. закону на частоте, равной одной из собств. частот системы.

$\Theta_1(t) = A_1 \cos(\varphi_1 + \omega_1 t)$

$\Theta_2(t) = A_2 \cos(\varphi_2 + \omega_2 t)$

Из независимости нормальных координат следует, что существуют такие режимы колебаний, при которых отлична от 0 только одна нормальная координата, а все остальные равны 0.

$\Theta_1 = x_1 + x_2 \qquad \Theta_2 = x_2 - x_1$

$x_1 = \frac{\Theta_1 - \Theta_2}{2} \qquad x_2 =$

В этом случае все мат. точки системы колеблются по гармоническому закону на соответств. собств. частоте.
Нормальное колебание - гарм. колеб. на одной из собств. частот системы.
Чтобы наблюдать ~~в~~ такие колебания, нужно подобрать подходящие нач. усл.

$\Theta_2(t=0),\ \dot{\Theta}_2(t=0) = 0$

$x_2(t=0) - x_1(t=0) = 0$

$x_{20} = x_{10}$

Второе норм. колебание

$\Theta_1(t) = 0$

$\Theta_1(t=0) = 0$

$\dot{\Theta}_1(t=0) = 0$

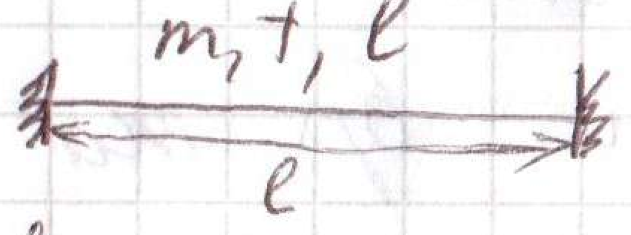
$x_1(t=0) + x_2(t=0) = 0$

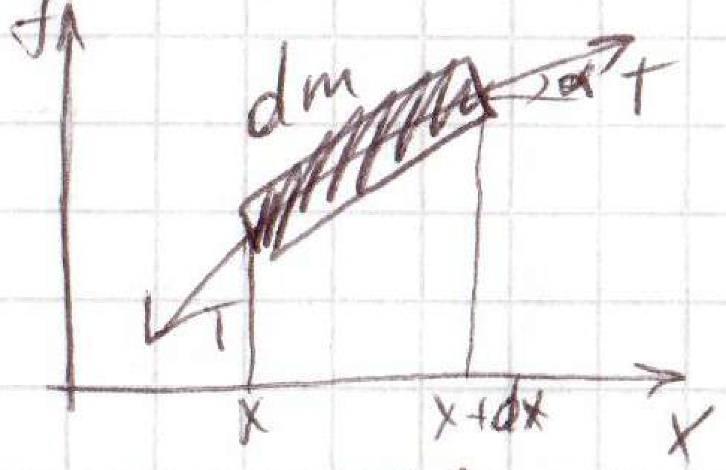
$x_{20} = -x_{10}$

## §27. Механика волновых процессов.

Волна — колебание, распространяющееся со временем в сплошной среде.

Рассмотрим колебания струны.




$\alpha, \beta \ll 1$

$$dm\,\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = T\sin\beta - T\sin\alpha = T(\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha) =$$
$$= T\left(\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{x+dx} - \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{x}\right) = T\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,dx =$$
$$= dm\,\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

Линейная плотность $\rho = \frac{m}{l}$

$dm = \rho\,dl \approx \rho\,dx$

$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ — волновое ур-е

$\sqrt{\frac{T}{\rho}} = v \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = v^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$

Бегущие волны

$f(x,t) = f_1(x - vt) + f_2(x + vt)$

$\dot f_1 = -v f_1'$

$\ddot f_1 = v^2 f_1''$

$x - \upsilon t = \cos t$

$dx - \upsilon dt = 0$

$\upsilon = \frac{dx}{dt}$ – скорость движения

② Стоячая волна

Стоячая волна – волна, которые описываются функцией произведения ф-ции времени на ф-цию координат.

$\ddot{f} = \upsilon^2 f''$

$f(x,t) = X(x) \cdot \Theta(t)$

$X\ddot{\Theta} = \upsilon^2 X'' \Theta$

$\frac{\ddot{\Theta}}{\Theta} = \upsilon^2 X'' = c = const < 0$

$c = -\omega^2$

$\frac{\ddot{\Theta}}{\Theta} = -\omega^2 \rightarrow \ddot{\Theta} + \omega^2 \Theta = 0$

$\upsilon^2 \frac{X''}{X} = -\omega^2 \longrightarrow X'' + \frac{\omega^2}{\upsilon^2} X = 0.$

$\frac{\omega}{\upsilon} = K$

$X'' + K^2 X = 0$

$X(x) = A \sin Kx$

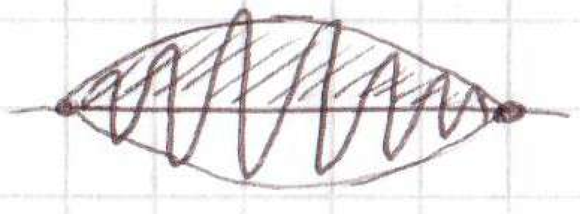
Граничные условия

$X(x=0) = 0$

$X(x=l) = 0$

$\sin Kl = 0 \rightarrow Kl = n\pi, \ n = 1, 2, \dots$

$n = 1$



$Kl = \pi$

$K = \frac{\omega}{\upsilon}$

$\upsilon = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$

$\omega = K\upsilon = \boxed{\frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{T}{\rho}} = \omega_1}$

$n = 2 \quad Kl = 2\pi \quad \omega_2 = \omega_1.$

$n = 3 \quad \omega = 3\omega_1$

$n = 1$ – основной тон

$n = 2, 3, \dots$ – обертон

$\upsilon = \frac{dx}{dt}$ – скорость

# Статистическая механика

(Механика систем, состоящих из большого числа частиц).

## §28. Случайные величины и вероятности.

Случайное событие – событие, исход которого нельзя предсказать заранее, но наблюдение которого можно многократно повторить

Вероятность случайного события – отношение числа появлений события в серии испытаний к полному числу испытаний в пределе, когда число испытаний стремится к бесконечно

$$P(A) = \lim_{N \to \infty} \frac{N_A}{N}$$

$0 \le P \le 1$; $P = 0$ – невозможное событие
$P = 1$ – достоверное событие

1) Аксиома сложения вероятностей.

Вероятность ~~одного из~~ взаимоискл. событий равна сумме их вероятностей.

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

2) Аксиома умножения вероятностей
Вероятность наступления незав. случ. событий равна произведению их вероятностей.

Случайная величина – это величина, значение которой нельзя предсказать заранее, но измерение которой можно многократно повторить.

Распределение плотности вероятности – отношение вероятности попадания с.в. в малый интервал вблизи заданного значения к величине интервала в пределе, когда интервал стремится к 0.

$$\omega_0(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x_0 \le X \le x_0 + \Delta x)}{\Delta x}$$

Нормировка: $\int \omega_0(x)dx = 1$.

Вычисление среднего $f(x)$

$$\overline{f(x)} = \langle f(x) \rangle = \int f(x)\,\omega(x)\,dx$$

Среднее $\overline{x} = \int x\,\omega(x)\,dx$